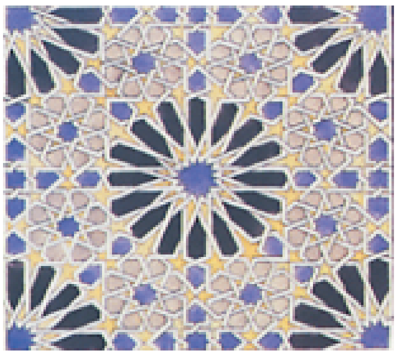
Matemáticas y su Didáctica para Maestros

Manual para el Estudiante

Edición Febrero 2002

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

GEOMETRÍA Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS



Juan D. Godino
Francisco Ruíz

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

GEOMETRÍA Y SU DIDÁCTICA

PARA MAESTROS

Juan D. Godino
Francisco Ruiz

GEOMETRÍA Y SU DIDÁCTICA PARA
MAESTROS

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
18071 Granada

ISBN: 84-932510-1-1
Depósito Legal: GR-340 /2002

Impresión: ReproDigital. C/ Baza, 6.
La Mediana. Polígono Juncaril. Albolote. 18220-
Granada.

Distribución en Internet:
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452.

Índice

Capítulo 2:
TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS. SIMETRÍA Y SEMEJANZA

Página

Capítulo 3:
ORIENTACIÓN ESPACIAL. SISTEMAS DE REFERENCIA

Geometría y su Didáctica para Maestros

Capítulo 1:

FIGURAS GEOMÉTRICAS

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN PRIMARIA

Consigna:
Los enunciados que se incluyen a continuación han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos,

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno lo consideres más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

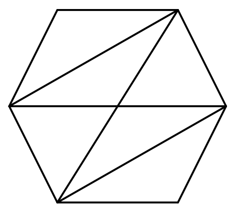
1. ¿En cuántos puntos pueden cortarse cuatro rectas?

2. Dibuja un polígono convexo de siete lados y traza sus diagonales. ¿cuántas diagonales tiene?

3. ¿Cuántos grados mide el ángulo central de un decágono regular?

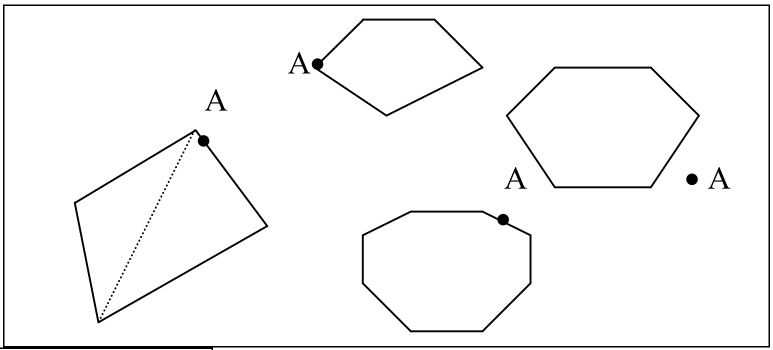
4. Repite esta plantilla seis veces y colorea en cada caso

a) Un triángulo equilátero
b) Un triángulo isósceles
c) Un triángulo escaleno
d) Un trapecio
e) Un rectángulo
f) Un rombo



5. Corta un cuadrado y construye un romboide con las partes.

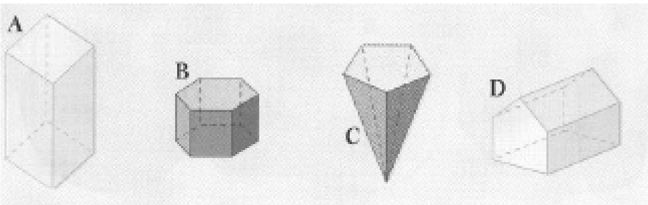
6. En cada uno de estos polígonos traza las diagonales que parten del vértice A. Cuenta el número de triángulos en que ha quedado dividido cada uno de los polígonos y completa la tabla



Número de lados	4 5 6 7 8 9 10
Número de triángulos	2

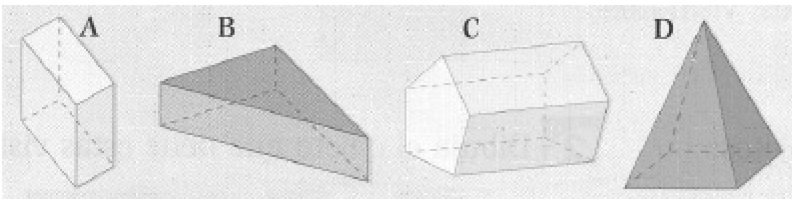
7. Dibuja en papel cuadriculado:
   a) Un cuadrilátero que tenga dos ángulos agudos, dos ángulos obtusos y dos pares de lados paralelos.
   b) Un cuadrilátero que tenga los cuatro ángulos rectos y los lados iguales dos a dos.

8. Cuenta el número de caras, aristas y vértices de cada uno de estos poliedros y comprueba que: nº de caras + nº de vértices = nº de aristas + 2.

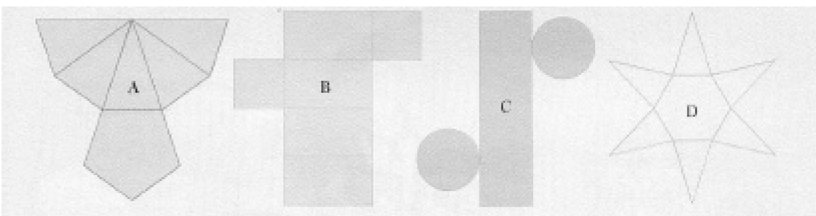


	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS
A			
B			
C			
D			

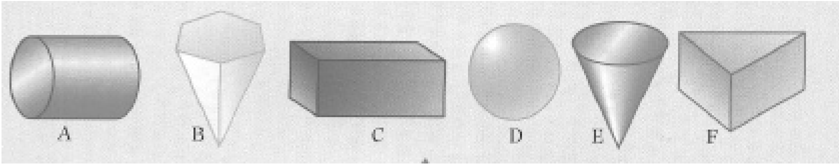
9. Dibuja el desarrollo de estos poliedros



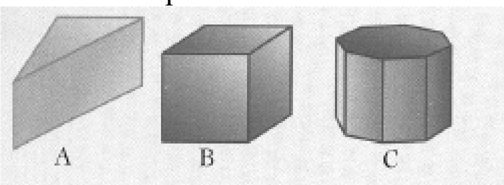
10. ¿Qué figura obtendrías a partir de cada uno de estos desarrollos?



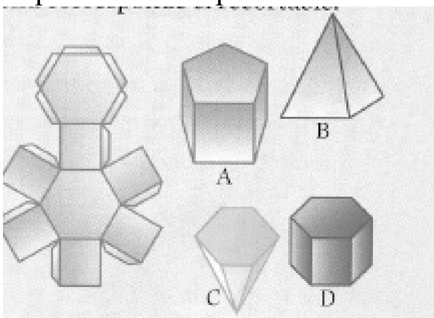
11. Escribe el nombre de cada uno de estos cuerpos geométricos



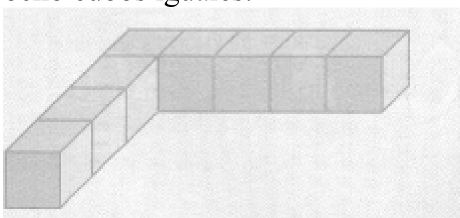
12. a) ¿Cuántas caras laterales tiene cada uno de estos prismas ?



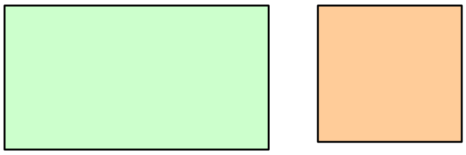
b) ¿A cuál de los cuerpos de la izquierda corresponde el recortable?



c) Dibuja todos los polígonos que forman las caras de este poliedro construido con ocho cubos iguales:



d) Escribe en qué se parecen y en qué se diferencia estos dos polígonos:



B: Conocimientos Matemáticos

1. LA GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES

1.1. Naturaleza de los objetos geométricos

Antes de comenzar a estudiar la geometría y de ver cómo podemos ayudar a los niños a que aprendan geometría, consideramos necesario aclarar de qué trata esta rama de las matemáticas y reflexionar sobre la naturaleza de sus objetos. El significado etimológico de la palabra geometría, "medida de la tierra", nos indica su origen de tipo práctico, relacionado con las actividades de reconstrucción de los límites de las parcelas de terreno que tenían que hacer los egipcios, tras las inundaciones del Nilo. Pero la Geometría dejó hace ya hace mucho tiempo de ocuparse de la medida de la tierra. Con los griegos la geometría se interesó por el mundo de las formas, la identificación de sus componentes más elementales y de las relaciones y combinaciones entre dichos componentes.

La geometría se ocupa de una clase especial de objetos que designamos con palabras como, *punto, recta, plano, triángulo, polígono, poliedro*, etc. Tales términos y expresiones designan "figuras geométricas", las cuales son consideradas como abstracciones, conceptos, entidades ideales o representaciones generales de una categoría de objetos. Por tanto, hay que tener en cuenta que la naturaleza de los entes geométricos es esencialmente distinta de los objetos perceptibles, como este ordenador, una mesa o un árbol. Un punto, una línea, un plano, un círculo, etc., no tienen ninguna consistencia material, ningún peso, color, densidad, etc.

Un problema didáctico crucial es que con frecuencia usamos la misma palabra para referimos a los objetos perceptibles con determinada forma geométrica ("el triángulo es un instrumento de percusión") y al concepto geométrico correspondiente (el triángulo isósceles). Además, en la clase de matemáticas, y en los textos escolares no se diferencian los dos planos (objeto abstracto, realidad concreta) y encontramos expresiones como: "Dibuja una recta (un triángulo, etc)". Como entidades abstractas que son, parece obvio que no se puede dibujar una recta o un triángulo. Lo que se dibuja es un objeto perceptible que evoca o simboliza el objeto abstracto correspondiente. La recta, como entidad matemática, es ilimitada y carece de espesor, no así los dibujos que se hacen de ella. Del mismo modo, un triángulo no es una pieza de material de una forma especial, ni una imagen dibujada sobre el papel: *Es una forma controlada por su definición*.

Las entidades matemáticas y también las geométricas son creadas en última instancia mediante definiciones, reglas que fijan el uso de los términos y expresiones. Ciertamente que no serán reglas arbitrarias, sino que se harán de manera que sean útiles para la descripción del mundo que nos rodea –o de mundos imaginarios-, pero su naturaleza es la que hace que establecer una propiedad geométrica (por ejemplo, que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo plano sea un ángulo llano) sea un acto esencialmente distinto a descubrir que todos los leones son carnívoros. Esta naturaleza es de tipo "gramatical" (puesto que se deriva de las reglas de uso de las palabras y expresiones) y es la que concede a las entidades matemáticas su carácter necesario, universal y atemporal.

El "lenguaje" geométrico tiene su origen en nuestra necesidad de describir el mundo de las formas de los cuerpos perceptibles que nos rodean, su tamaño y posición en el espacio.

Pero superada la primera fase de clasificación de las formas, de identificación de las propiedades de las clases de objetos y la creación de un lenguaje que permita su descripción de manera precisa, la actividad geométrica se ocupa de estructurar el mundo de entidades geométricas creadas y de deducir las consecuencias lógicas que se derivan de los convenios establecidos. Rápidamente somos arrojados fuera del cómodo mundo de nuestras percepciones para entrar en el mundo del lenguaje, de la gramática y de la lógica. Cuando pedimos a un niño que entre una colección de paralelogramos identifique los rectángulos, no le exigimos que discrimine la forma perceptible de los rectángulos de entre las restantes figuras, sino que sea capaz de aplicar los convenios que hemos establecido para el uso de la palabra 'rectángulo'. Siendo un poco exigentes, incluso podemos criticar la pertinencia de esa tarea, ya que visualmente es imposible saber si un romboide cuyos ángulos miden 89º (y 91º) debemos considerarlo o no como un rectángulo. La respuesta correcta que un niño debería dar sería algo así como, "*si estos ángulos de estas figuras son efectivamente rectos, entonces decimos que son rectángulos*"; también debería incluir los cuadrados entre los rectángulos.

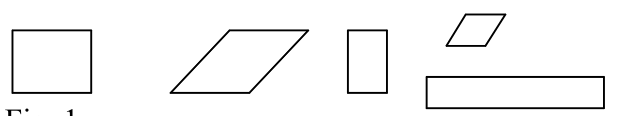


Fig. 1

Como conclusión, debemos tener claro que cuando hablamos de "figuras o formas geométricas" no nos referimos a ninguna clase de objetos perceptibles, aunque ciertamente los dibujos, imágenes y materializaciones concretas son, al menos en los primeros niveles del aprendizaje, la razón de ser del lenguaje geométrico y el apoyo intuitivo para la formulación de conjeturas sobre las relaciones entre las entidades y propiedades geométricas.

1.2. Aplicaciones de la geometría

La Geometría estudia las formas de las figuras y los cuerpos geométricos. En la vida cotidiana encontramos modelos y ejemplificaciones físicas de esos objetos ideales de los que se ocupa la Geometría, siendo muchas y variadas las aplicaciones de esta parte de las matemáticas.

Una de las principales fuentes de estos objetos físicos que evocan figuras y cuerpos geométricos está en la propia Naturaleza. Multitud de elementos naturales de distinta especie comparten la misma forma, como ocurre con las formas en espiral (conchas marina, caracoles, galaxias, hojas de los helechos, disposición de las semillas del girasol, etc.). Igualmente encontramos semejanzas entre las ramificaciones de los árboles, el sistema arterial y las bifurcaciones de los ríos, o entre los cristales, las pompas de jabón y las placas de los caparazones de las tortugas. La Naturaleza, en contextos diferentes, utiliza un número reducido de formas parecidas, y parece que tuviese predilección por las formas serpenteantes, las espirales y las uniones de 120º. Pensemos en la disposición hexagonal perfecta de las celdillas de los panales de las abejas, siendo su interior poliedros que recubren el espacio, como el rombododecaedro.

El ser humano refleja en su quehacer diario y en sus obras de arte esas imágenes ideales que obtiene de la observación de la Naturaleza: realiza objetos de cerámica, dibujos, edificios y los más diversos utensilios proyectando en ellos las figuras geométricas que ha perfeccionado en la mente. El entorno artístico y arquitectónico ha sido un importante factor de desarrollo de la Geometría. Así desde la construcción de viviendas o monumentos funerarios (pirámides de Egipto), hasta templos de los más diversos estilos han impulsado constantemente el descubrimiento de nuevas formas y propiedades geométricas.

Muchas profesiones, además de los matemáticos, arquitectos e ingenieros necesitan y usan la Geometría: albañiles, ceramistas, artesanos (objetos de taracea, trabajos de cuero, repujados de latón, tejedores de alfombras, bordadoras, encajes de bolillos, etc.), decoradores, coreógrafos, diseñadores de muebles, etc. Todos ellos de una forma más o menos consciente, utilizan el espacio y las formas geométricas.

También se encuentra la geometría en los juegos: billar (bolas y mesa en forma de doble cuadrado, con rombos en los bordes), parchís, ajedrez, la rayuela, el juego de los barcos, así como multitud de juegos de ordenador. El mundo de los deportes está repleto de figuras geométricas: fútbol (el rectángulo del campo, las áreas, el balón, las porterías, etc.), baloncesto (canastas, zonas, campo, etc.), tenis, rugby, béisbol, etc.

Seguramente el lector puede completar estas listas de situaciones y ámbitos donde podemos encontrar objetos geométricos, y cuyo manejo facilita el conocimiento de tales ámbitos.

Ejercicio:

1. Hacer una lista de figuras y conceptos geométricos que encuentres en: Naturaleza; artes; música; la calle; la casa; el deporte; los juegos; las profesiones.

1.3. Situaciones introductorias

A. Lista mínima de propiedades

En la figura adjunta hay representados diversos rectángulos. Listar todas las posibles propiedades de los rectángulos. Por ejemplo:
- tiene cuatro lados
- los lados opuestos son paralelos
- etc.

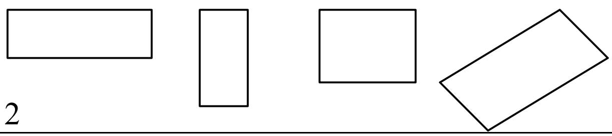


Fig. 2

Elaborar una lista mínima de propiedades de tal manera que si una figura tiene esas propiedades podemos decir que es un rectángulo.

B. Deducción informal

Demostrar si los enunciados siguientes son verdaderos o falso:
- Si una figura (F) es un cilindro, entonces es un prima.
- Si F es un prisma, entonces es un cilindro.
- Si F es un cuadrado, entonces es un rombo.
- Todos los paralelogramos tienen diagonales congruentes.
- Todos los cuadriláteros con diagonales congruentes son paralelogramos.
- Si dos rectángulos tienen la misma área, entonces son congruentes.

. Todos los prismas tienen un plano de simetría.
- Todos los prismas rectos tienen un plano de simetría.
- Si un prisma tiene un plano de simetría, entonces es un prisma recto.

2. COMPONENTES ELEMENTALES DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

2.1. Puntos, rectas, planos y espacio

En el cuadro adjunto hemos escrito las letras A, B, P, Q a la derecha de una diminuta marca redondeada. Decimos que dichas marcas son *puntos*. Igualmente diríamos que se trata de puntos si en lugar de usar una impresora láser para hacer la impresión usáramos un lápiz con una punta gruesa, o un lápiz imaginario que dibuja puntos tan finos que sean prácticamente imperceptibles.

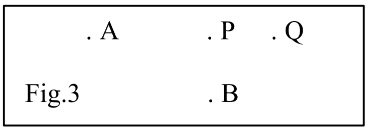


Fig.3

El punto, como objeto o figura geométrica, se considera que no tiene dimensiones y se usa para indicar una posición en el espacio.

En el cuadro siguiente decimos que hay representadas dos líneas rectas designadas con las letras r y s:

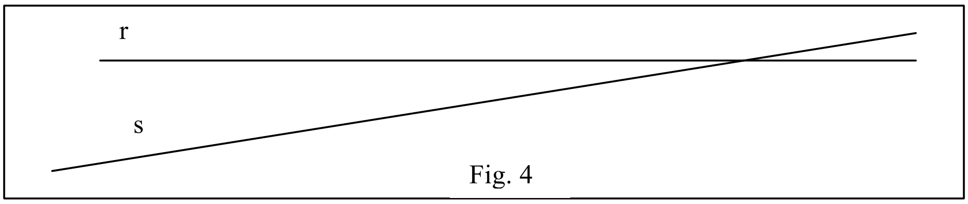


Fig. 4

Pero al objeto o figura geométrica *línea recta* se le atribuyen unas características que realmente no tienen los trazos marcados en el cuadro. Se considera que las rectas son ilimitadas por ambos extremos, así como que no tienen ningún espesor, lo que hace imposible "representar" las rectas. La característica de ser ilimitadas por ambos extremos se suele indicar marcando flechas en cada extremo. Otras experiencias que sugieren la *idea* de recta pueden ser un hilo tirante, el borde una regla, etc.

Se considera que dos puntos determinan una y sólo una línea recta que contiene a dichos puntos. Tres o más puntos pueden determinar varias rectas, pero si están contenidas en una recta se dice que son colineales.

Tres puntos no colineales se dice que determinan un plano, figura geométrica que suele ser evocada por una hoja de papel apoyada sobre una mesa, la propia superficie de una mesa, la pizarra, etc. De nuevo al objeto o figura geométrica designada con la palabra 'plano' se le atribuyen unas características ideales que no tienen tales objetos perceptibles, como no tener límites en ninguna dirección, ni tampoco ningún espesor.

Se dice que las rectas y los planos son conjuntos de puntos. Se considera el *espacio* como el conjunto de todos los puntos. Cualquier subconjunto de puntos del espacio se considera como una *figura geométrica*. El objetivo de la geometría será describir, clasificar y estudiar las propiedades de las figuras geométricas.

Dos rectas contenidas en el plano que no tienen ningún punto en común se dice que son *paralelas*. Si tienen un punto en común se dice que son *concurrentes*. Una recta que corta a otras dos se dice que es una *transversal*.

Todo punto P divide a una recta que lo contiene en dos subconjuntos formados por los puntos que están situados a un mismo lado respecto de P. Estos subconjuntos se dice que son *semirectas* o rayos de extremo P.

También se habla de *semiplanos:* cada una de las dos partes en que queda dividido un plano al quitar una recta del mismo. También serán semiplanos abiertos o cerrados, según que se incluya o no la recta a partir de la cual se forma.

Ejercicios:

2. ¿En cuántas partes queda dividido un plano al quitarle:
a) Dos rectas paralelas; b) Dos rectas concurrentes; c) Tres rectas, dos de las cuales son paralelas; d) Tres rectas concurrentes.

3. ¿Se puede separar un plano en cinco partes quitando: a) tres rectas; b) cuatro rectas?

4. ¿Cuál es el máximo número de partes en que se puede cortar un plano por 7 rectas?

5. Describir el interior de la siguiente figura como intersección o unión de semiplanos:

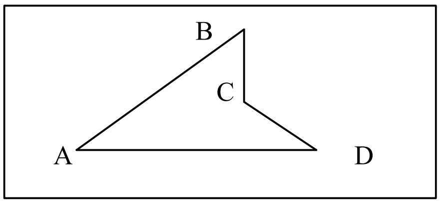


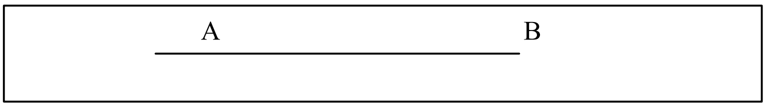
Fig. 5

5. Describir el interior de un tetraedro como intersección de semiespacios abiertos.

2.2. Segmentos y ángulos

En el siguiente cuadro decimos que está representado el segmento AB, conjunto de puntos comprendidos entre los puntos A y B, que se dice son los extremos del segmento.

Fig. 6

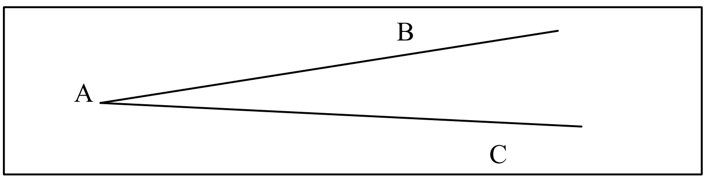


La distancia entre los puntos A y B se dice que es la longitud del segmento AB. Dos segmentos AB y CD se dice que son *congruentes* si tienen la misma longitud.

Un segmento se puede definir también como la intersección de dos semirectas contenidas en una misma recta. Los segmentos pueden ser abiertos o cerrados según que en las semirectas se consideren incluidos o no los extremos.

Un *ángulo* se puede considerar como la intersección de dos semiplanos cerrados, obtenidos a partir de dos rectas incidentes. Ambas semirectas son los lados del ángulo y el punto de concurrencia es el vértice. También se usa la palabra ángulo para designar a la figura geométrica formada solamente por el conjunto de los lados y el vértice. La figura siguiente representa el ángulo formado por las semirectas AB y AC; se suele designar como ángulo

Fig. 7

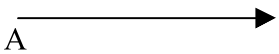
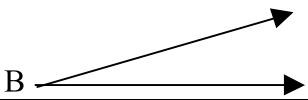
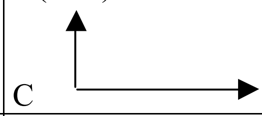
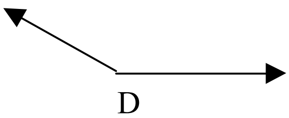
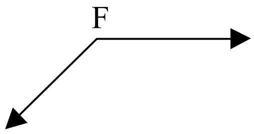


$\angle$BAC o tambien como $\angle$CAB

Un ángulo cuyos lados no están sobre la misma recta separa al plano en dos partes, el *interior* y el *exterior* del ángulo. El subconjunto de puntos del plano formados por todos los segmentos que unen puntos situados sobre los lados AB y AC forman el interior del ángulo, y su complementario respecto del plano será el exterior.

El tamaño de un ángulo se mide por la cantidad de rotación requerida para girar uno de los lados del ángulo, tomando como centro de giro el vértice, para que coincida con el otro lado. Como unidad de medida habitual se usa el grado, la 360 ava parte de la abertura de la circunferencia. La medida de un ángulo ∠ A la indicaremos por *m*(∠ A)

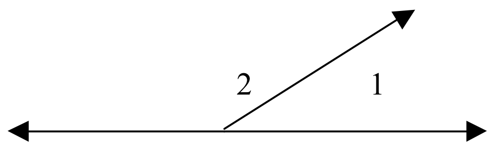
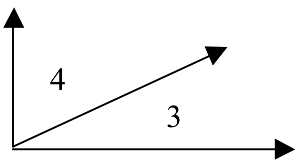
Clasificación de los ángulos por su medida

ángulo nulo, m(∠ A) =0º  	ángulo agudo, 0< m(∠ B) < 90º  	ángulo recto, m(∠ C) = 90º 
ángulo obtuso, 90 < m(∠ D) < 180º  	ángulo llano, m(∠ E) = 180º  	ángulo reflejo, 180º< m(∠ A) < 360º 

Pares de ángulos y teoremas relacionados

- Dos ángulos con medidas m_1 y m_2 se dice que son complementarios si y sólo si $m_1 + m_2 = 90º$. Se dice que son suplementarios si $m_1 + m_2 = 180º$.

- Dos ángulos que tienen un lado común y cuyos interiores no se solapan se dice que son adyacentes.

 ∠ 1 y ∠ 2 son ángulos adyacentes suplementarios	 ∠ 3 y ∠ 4 son ángulos adyacentes complementarios

- Dos ángulos se llaman verticales cuando sus cuatro lados forman dos rectas que se cortan

- Cuando dos líneas *l* y *m* se cortan en dos puntos por otra recta transversal *t* se forman cuatro pares de ángulos que se llaman ángulos correspondientes (Fig. 8).

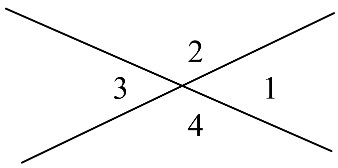
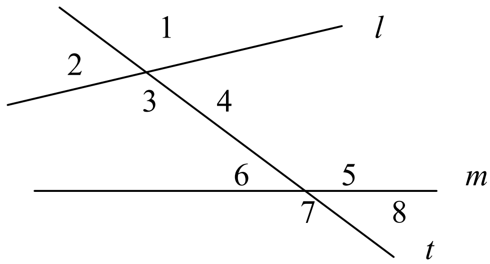
 $\angle$ 1 y $\angle$ 3 son ángulos verticales $\angle$ 2 y $\angle$ 4 son ángulos verticales	 Ángulos correspondientes: $\angle$ 1 y $\angle$ 5 ; $\angle$ 2 y $\angle$ 6 ; $\angle$ 3 y $\angle$ 7 ; $\angle$ 4 y $\angle$ 8

Fig. 8

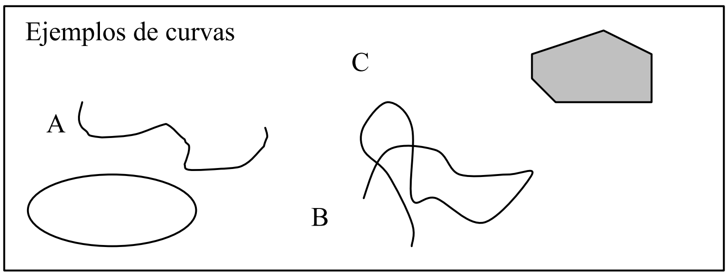
Ejercicios:

6. Intenta probar los siguientes teoremas sobre ángulos:
   1) Si dos rectas paralelas se cortan por una transveral los ángulos correspondientes son iguales.
   2) Si dos rectas del plano son cortadas por una transversal de manera que los ángulos correspondientes son iguales, entonces las rectas son paralelas.
   3) Dos rectas cortadas por una transveral son paralelas si y sólo si un par de ángulos alternos internos son congruentes.
   4) Las bisectrices de dos ángulos suplementarios adyacentes forman un ángulo recto.
   5) Medida de los ángulos de un triángulo: la suma de los ángulos interiores de cualquier tríangulo es un ángulo llano.

3. CURVAS Y POLÍGONOS EN EL PLANO

3.1. Curvas y regiones

Una *curva* plana se puede describir de manera intuitiva e informal como el conjunto de puntos que un lápiz traza al ser desplazado por el plano sin ser levantado. Si el lápiz nunca pasa dos veces por un mismo punto se dice que la curva es *simple*. Si el lápiz se levanta en el mismo punto en que comenzó a trazar se dice que la curva es *cerrada*. . Si el único punto por el que el lápiz pasa dos veces es el del comienzo y final del trazado se dirá que la curva es *cerrada y simple*. Se requiere que las curvas tengan un punto inicial y otro final, por lo que las rectas, semirecta y ángulos no son curvas.



Teorema de la curva de Jordan:

Una curva cerrada simple separa los puntos del plano en tres subconjuntos disjuntos: la propia curva, el interior, y el exterior de la curva. Esta propiedad parece obvia en casos sencillos, pero enunciada en términos generales requiere una demostración matemática nada fácil. Incluso la demostración dada por el matemático francés Camile Jordan (1838-1922) que enunció este teorema era incorrecta.

El interior y el exterior de una curva cerrada simple se designan también como *regiones*. De manera más general el conjunto complementario, respecto del plano que las contiene, de conjuntos de rectas, semirectas y curvas está compuesto de una o más regiones. Por ejemplo, una recta separa al plano en dos regiones llamadas *semiplanos*. Un ángulo, si no es nulo o llano, separa al plano en dos regiones llamadas el interior y el exterior del ángulo.

Curvas y figuras convexas

Una figura se dice que es *convexa*, si y sólo si, contiene el segmento PQ para cada par de puntos P y Q contenidos en la figura. Las figuras no convexas se dice que son *cóncavas*.

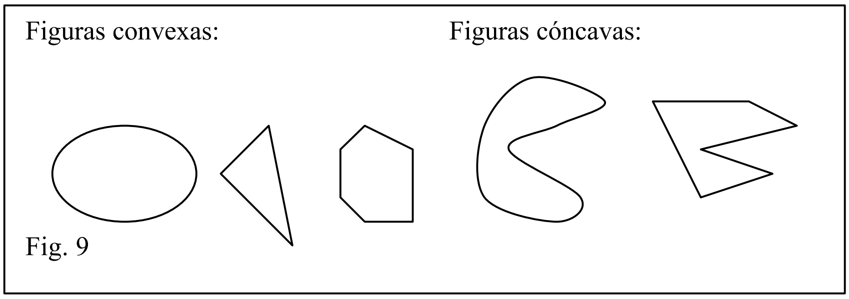


Fig. 9

La *circunferencia* es una curva cerrada, convexa, tal que la distancia de cualquiera de sus puntos a otro fijo es constante. El punto fijo se llama centro de la circunferencia y la distancia constante se llama radio (también se llama radio al segmento que uno el centro con cualquier punto de la circunferencia; un diámetro es cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.

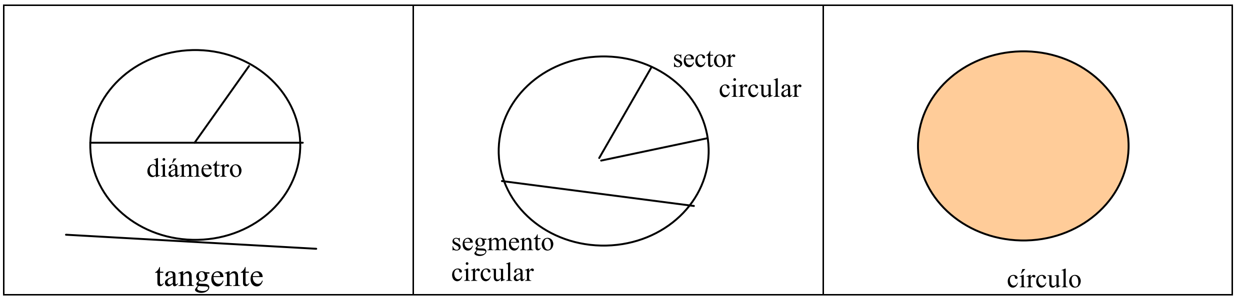


Fig. 10

3.2. Curvas poligonales y polígonos

Una curva simple que está formada por segmentos unidos por sus extremos se dice que es una *curva poligonal* . Si dicha curva es cerrada se dice que es un *polígono*: a los segmentos que la forman se llaman *lados* y a los extremos de esos segmentos, *vértices*. Si todos los lados de un polígono son iguales se dice que es regular.

En principio, nada se dice sobre si las curvas poligonales, y los polígonos, han de ser planos. También se puede hablar de poligonales y polígonos espaciales, aunque el estudio de los polígonos se suele restringir a los polígonos contenidos en el plano.

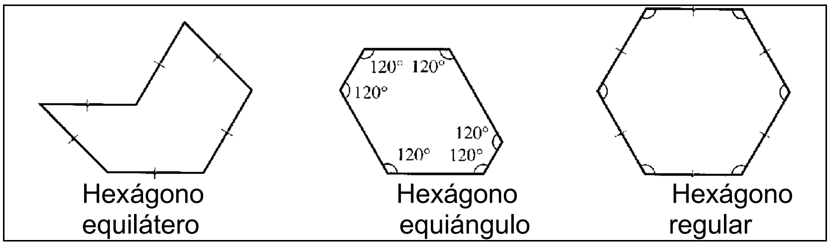
Los polígonos se nombran según el número de lados o vértices que tienen (triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, etc).

Las semirectas que contienen a dos lados concurrentes en un vértices determinan un ángulo del polígono. En un polígono convexo el interior del polígono será la intersección de los interiores de los ángulos del polígono. Si en un ángulo interior de un polígono sustituimos una de las semirectas por su opuesta se obtiene otro ángulo distinto llamado *ángulo exterior*.

Polígonos regulares

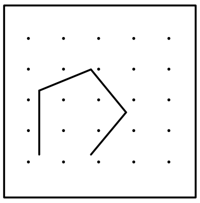
- Un polígono que tiene todos sus lados iguales se dice que es *equilátero* (todos sus lados son congruentes).
- Un polígono convexo cuyos ángulos interiores son todos congruentes se dice que es *equiángulo*.
- Un polígono convexo que es tiene sus lados y sus ángulos iguales se dice que es *regular*.
- En un polígono regular de n lados, cualquier ángulo con vértice en el centro y cuyos lados contienen vértices adyacentes del polígono se dice que es un ángulo central del polígono.

Fig. 11



Ejercicios:

7. Un material didáctico conocido como geoplano es una herramienta útil en el estudio de los polígonos. Un geoplano 5x5 consiste en una plancha de madera y 25 clavos dispuestos según una malla cuadrada, como se indica en la figura. Se emplean gomas de colores para formar diversos polígonos tomando los clavos como sus vértices. ¿Cuántos cuadrados se pueden formar en este geoplano?



8. Probar que en un polígono regular de n lados,
   a) cada ángulo interior mide: (n-2). 180º/n
   b) cada ángulos exterior mide: 360º/n
   c) cada ángulo central mide: 360º/n

9. Un rectángulo ha sido dividido en dos partes congruentes. ¿Qúe forma pueden tener las partes formadas?

4. LOS TRIÁNGULOS Y SU CLASIFICACIÓN

4.1. Definiciones y propiedades

Es un polígono de tres lados, es decir, una porción de plano limitada por tres segmentos unidos, dos a dos, por sus extremos. Los tres segmentos que limitan el triángulo se denominan *lados*, y los extremos de los lados, *vértices*.

En un triángulo se consideran dos tipos de ángulos: *interior* (formado por dos lados) y *exterior* (formado por un lado y la prolongación de otro).

Algunas propiedades

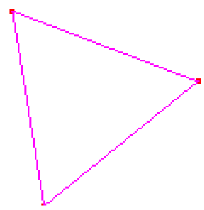
1. En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos.
2. En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.
3. Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales un lado y sus dos ángulos adyacentes.
4. Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales y el ángulo comprendidos.
5. Dos triángulos son iguales cuando tienen los tres lados iguales.
6. En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.
7. Si un triángulo tiene dos lados iguales, sus ángulos opuestos son también iguales.
8. En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

4.2. Clasificación de triángulos

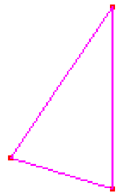
Los triángulos se clasifican atendiendo a sus lados y a sus ángulos.

Atendiendo a sus lados

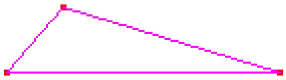
a) Equiláteros: Son los que tienen sus 3 lados iguales.



b) Isósceles: Son los que tienen dos lados iguales.

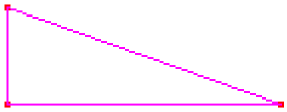


c) Escalenos: Son los que sus 3 son lados desiguales.

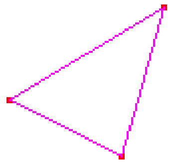


Atendiendo a sus ángulos:

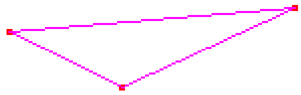
a) Rectángulos: Son los que tienen un ángulo recto (90°).



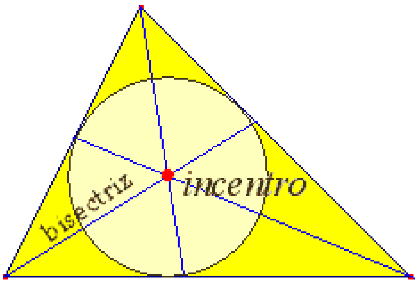
b) Acutángulos: Son los que tienen sus 3 ángulos agudos.



c) Obtusángulos: Son los que tienen un ángulo obtuso.

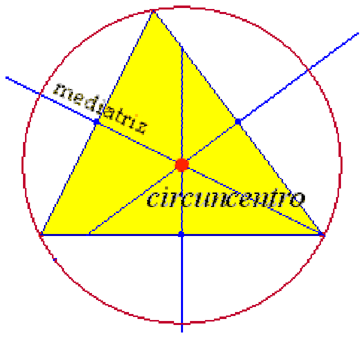


4.3. Elementos notables de un triángulo. Construcción de triángulos



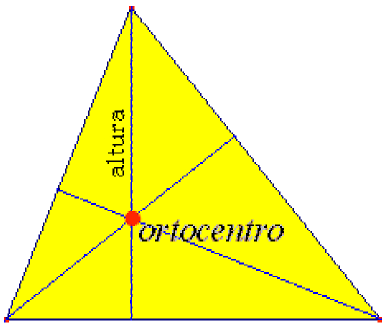
Bisectriz es la semirrecta que divide a un ángulo en dos partes iguales.

Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado Incentro, que es el centro de la circunferencia inscrita.



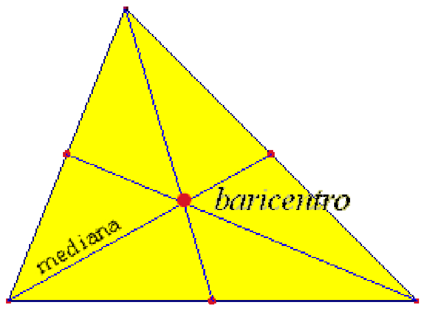
Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo en su punto medio.

Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto llamado Circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita.



Altura es el segmento perpendicular comprendido entre un vértice y el lado opuesto.

Las alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado Ortocentro.



Mediana es el segmento comprendido entre un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Las medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado Baricentro, que es el centro de gravedad del triángulo.

Construcción de triángulos

Para poder dibujar o construir un polígono basta con conocer algunos de sus elementos. Los diferentes casos que pueden plantearse para el triángulo son:

I. Conocidos los tres lados

II. Conocidos los tres ángulos (se pueden construir infinitos triángulos)

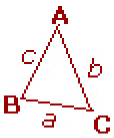
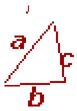
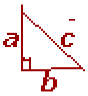
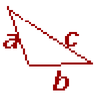
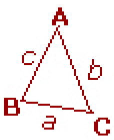
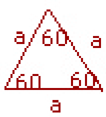
III. Conocidos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (el tercer lado viene automáticamente determinado por situarse en los extremos de los otros dos)
IV. Conocido un lado y los dos ángulos contiguos

En la siguiente página web del proyecto Descartes tienes la posibilidad de construir diversos triángulos en los supuestos anteriores, así como la de comprobar experimentalmente las propiedades citadas más arriba.
http://www.cnice.mecd.es/Descartes/1y2_eso/Triangulos/Triangu1.htm

Triángulos imposibles

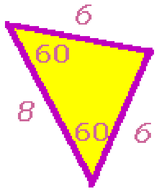
No todas las medidas de lados y ángulos son buenas para construir triángulos. Existen unas reglas que se deben cumplir para ello.

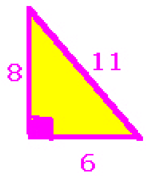
Reglas

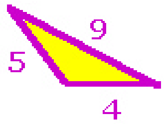
	**1.** En **todo** triángulo se cumple: a + b > c b + c > a a + c > b
	**2.** En cualquier triángulo **acutángulo** se cumple: $c^2 < a^2 + b^2$.
	**3.** En todo triángulo **rectángulo** se cumple: $c^2 = a^2 + b^2$.
	**4.** En todo triángulo **obtusángulo** se cumple: $c^2 > a^2 + b^2$.
	**5.** En **cualquier** triángulo es cierto que, a < b, si y solo si **ángulo A < ángulo B**.
	**6.** Los tres lados de un triángulo son iguales si y solo si los tres ángulos lo son.

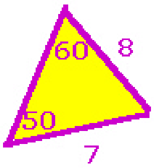
Ejercicio:

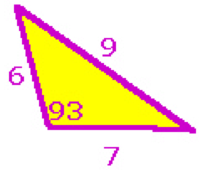
10. He aquí una serie de triángulos con unas medidas determinadas. Trata de construirlos. Señala cuál de las reglas anteriores no cumplen aquellos que no se puedan construir:











5. LOS CUADRILÁTEROS Y SU CLASIFICACIÓN

Después de los triángulos, los polígonos más sencillos, por tener menor número de lados, son los cuadriláteros. Todos conocemos dibujos de diversos tipos de cuadriláteros (cuadrados, rectángulos, rombos, etc.) pero realizar clasificaciones de estos objetos geométricos no solo ayuda a entender mejor sus propiedades sino a establecer relaciones entre ellos. Para clasificar hay que estudiar las características comunes que tienen estas figuras, lo que dependerá a su vez de los criterios o variables que observemos:

- Paralelismo de lados
- Igualdad de lados
- Igualdad de ángulos
- Número de ángulos rectos
- Posición relativa de las diagonales
- Concavidad y convexidad

5.1. Situación introductoria: Clasificación de los cuadriláteros

Realiza un dibujo de cada uno de los cuadriláteros que conozcas y escribe el nombre. Da una definición de cada cuadrilátero y realiza una clasificación de ellos. Escribe el criterio utilizado para su clasificación. La figura 1 representa una clasificación de cuadriláteros.

- ¿Conoces algún cuadrilátero que no esté en esa clasificación?
- ¿Qué criterios crees que se han utilizado para hacer la clasificación?
- ¿Cómo interpretas las flechas que unen cada grupo de cuadriláteros?

Teniendo en cuenta las flechas dibujadas

- ¿Cómo definirías el rombo? ¿Y el cuadrado? ¿Se pueden definir de otra forma?
- ¿Qué cuadrilátero responde a la condición de “tener dos pares de lados *no consecutivos* iguales”?
- ¿Y si le pedimos que tenga dos pares de lados *consecutivos* iguales?

Haz un dibujo de uno de estos cuadriláteros a los que llamaremos ***cometas***. Sitúalo en el esquema de la figura 12.

- ¿Qué forma tienen los cuadriláteros que solamente tienen un par de lados consecutivos iguales? Añádelo al esquema de la figura 1 con el nombre de ***cometas oblicuos***.

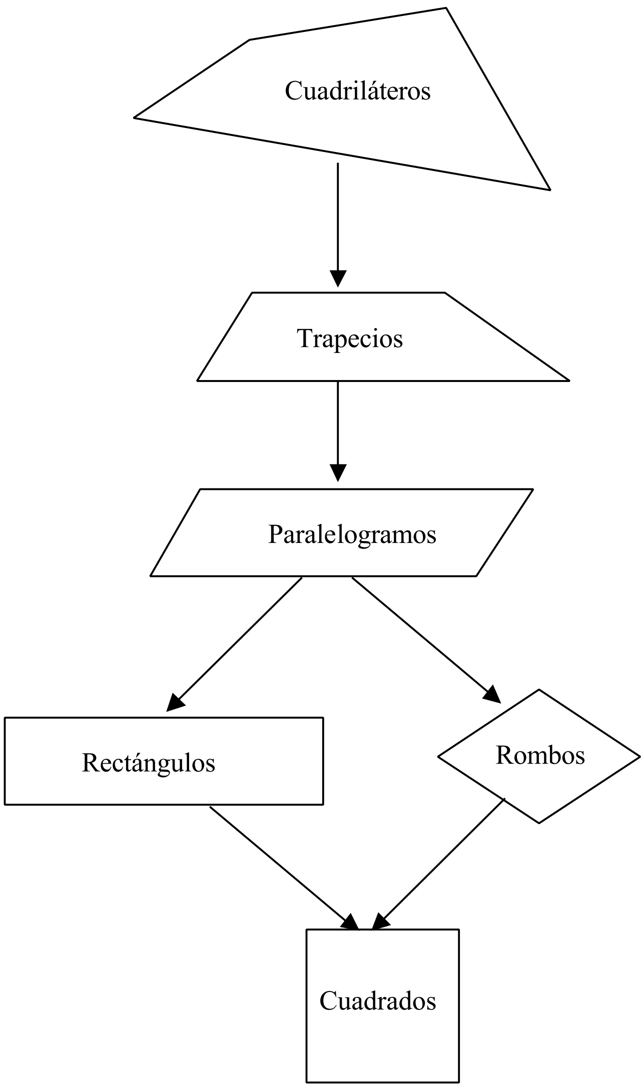


Figura 12: Clasificación de cuadriláteros

Si añadimos los cometas oblicuos y los cometas al esquema de la figura 12, obtendremos una clasificación más completa (figura 13). Observa la flecha que une las cometas con los rombos.

- ¿Qué relación encuentras entre estos dos tipos de cuadriláteros? ¿Cómo defines un rombo partiendo de una cometa?

Observa el paralelismo que existe entre trapecios y paralelogramos por una parte y cometas oblicuos y cometas por otra..

- ¿Qué hay que exigirle a un paralelogramo (romboide) para que se convierta en un rectángulo?

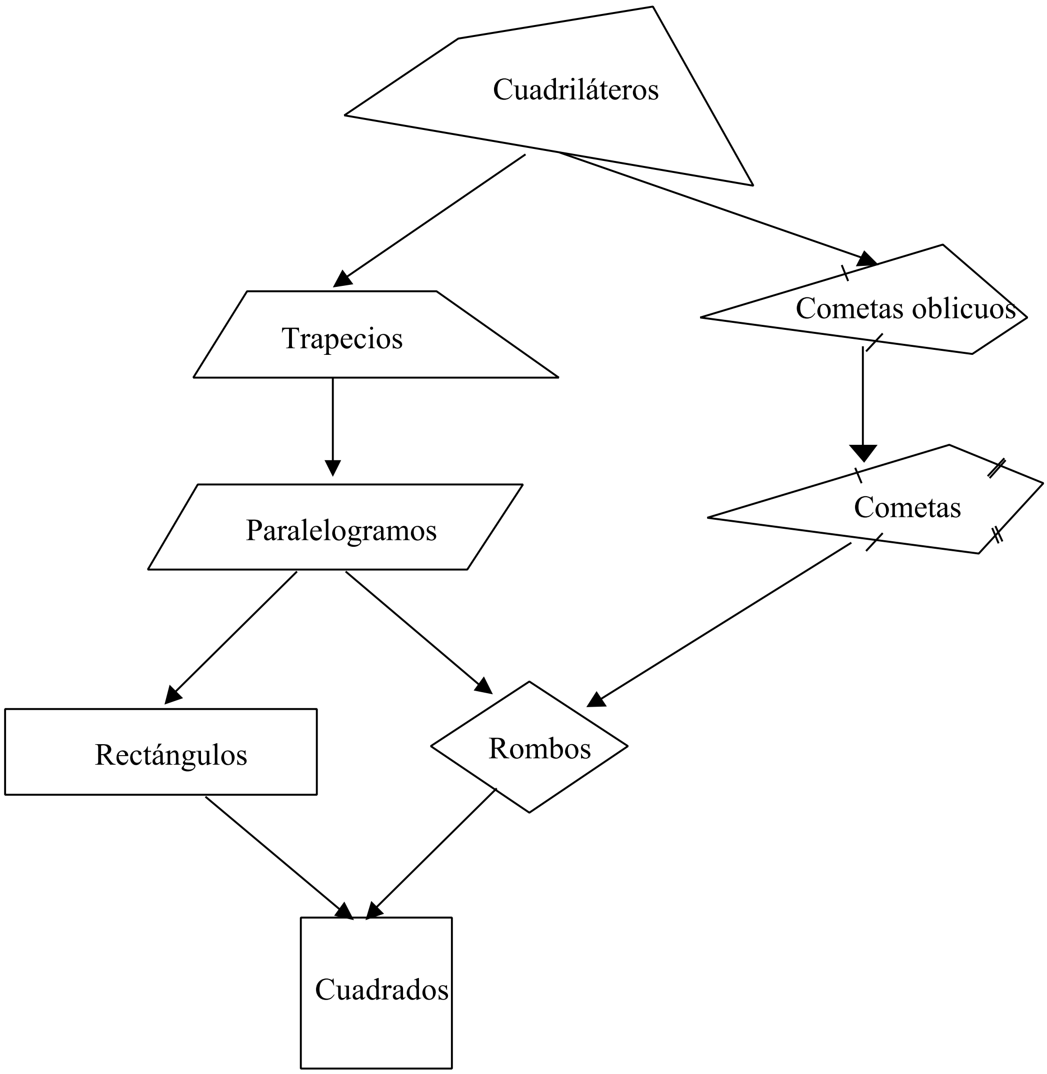


Figura 13: Cometas y cometas oblicuos

- ¿Cómo sería una cometa con uno, dos o tres, ángulos rectos? Llamemos a estos cuadriláteros ***cometas rectangulares***. Completa el diagrama de la figura 2 añadiendo estas nuevas cometas (figura 3).

Teniendo presente el diagrama de la figura 14:

- ¿Qué criterios se han utilizado para clasificar los cuadriláteros?
- ¿De cuántas formas podrías ahora definir un cuadrado?

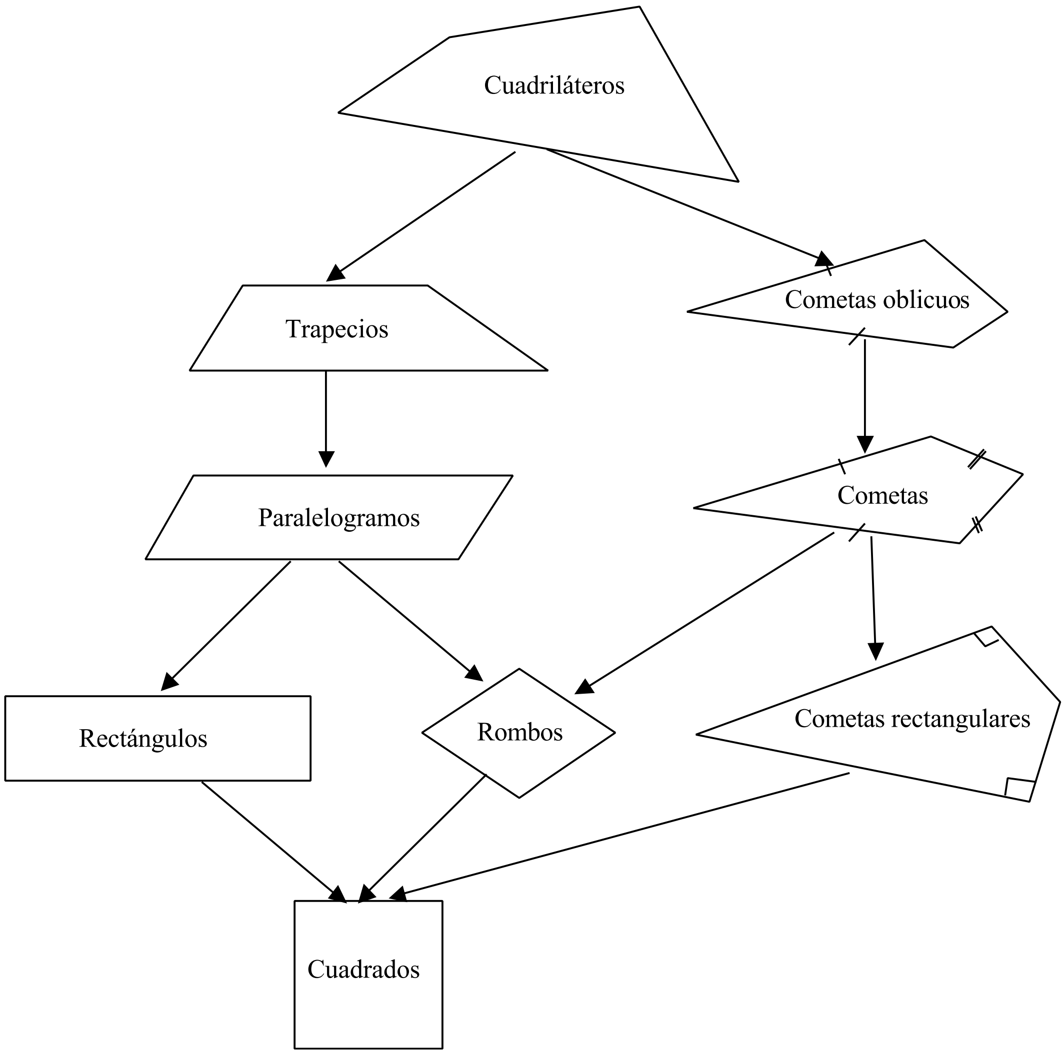


Figura 14: Clasificación de cuadriláteros

La figura 15 representa otra forma de clasificar los cuadriláteros. Observa las inclusiones e intersecciones de conjuntos de cuadriláteros. Añade los que falten siguiendo los criterios en cuanto a la forma de dibujar los contornos de los conjuntos, respetando la forma de cada conjunto de cuadriláteros.

Otra forma de clasificar los cuadriláteros es atendiendo a las diagonales (se cortan en el punto medio, son perpendiculares).

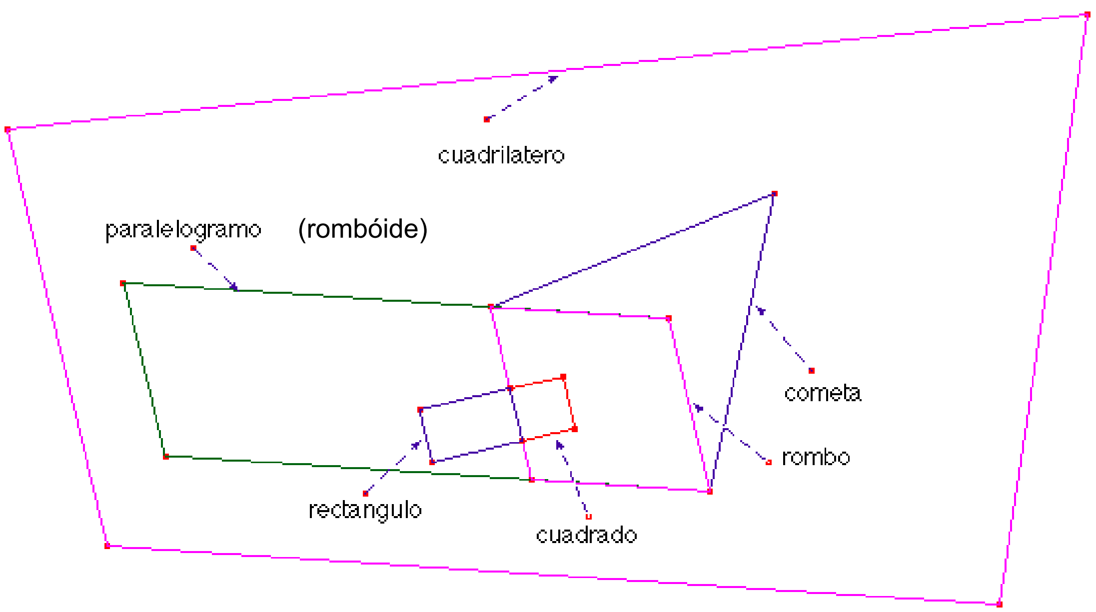


Figura 15: Clasificación figurada de cuadriláteros

5.2. Descripciones y propiedades de los cuadriláteros

Un *cuadrilátero* es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros tienen distintas formas pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales. En todos los cuadriláteros la suma de los ángulos interiores es igual a 360º. Los paralelogramos son los cuadriláteros que tienen paralelos los dos pares de lados opuestos.

Entre las propiedades de los cuadriláteros que se derivan de las de los polígonos en general tenemos,

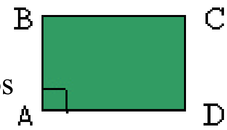
- La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a cuatro ángulos rectos.
- La suma de los ángulos exteriores es igual a cuatro rectos.
- Los cuadriláteros son los únicos polígonos para los cuales la suma de los ángulos exteriores es igual a la suma de los ángulos interiores.

Propiedades de los paralelogramos:

En todo para1elogramo:

- los lados opuestos son congruentes.
- los ángulos opuestos son congruentes
- las diagonales se cortan mutuamente en partes congruentes

Rectángulo



Se llama rectángulo al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos.
El conjunto de los rectángulos está incluido en el conjunto de los paralelogramos.

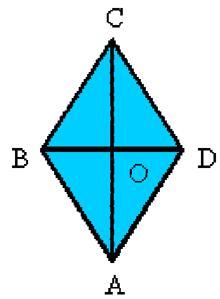
Propiedades del rectángulo:

El rectángulo tiene una propiedad que le es característica.

- Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

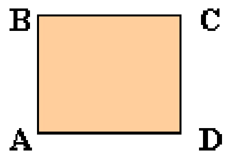
Rombo

Se llama rombo al paralelogramo que tiene sus cuatro lados congruentes.
La condición necesaria y suficiente para que un paralelogramo sea rombo es que tenga dos lados consecutivos congruentes.
El rombo tiene una propiedad que le es característica.
Las diagonales de un rombo son perpendiculares y bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen



Cuadrado

Se llama cuadrado al paralelogramo que tiene sus cuatros ángulos y sus cuatro lados congruentes.

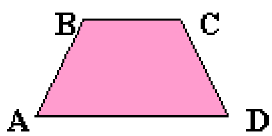


Cuadrado ABCD AB = BC = CD = DA A = B = C = D
El cuadrado es rectángulo y rombo a la vez

Propiedades del cuadrado
- Por ser el cuadrado un paralelogramo tiene las propiedades de los paralelogramos en general, es decir:
- Sus diagonales se cortan en partes congruentes.
- Por ser el cuadrado un caso particular del rectángulo, tiene las propiedades especiales de este último, es decir:
- Sus diagonales son congruentes.
- Por ser el cuadrado un caso particular del rombo tiene las propiedades especiales de este último, es decir:
    - Sus diagonales son perpendiculares y bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

Trapecio y Trapezoides

Los cuadriláteros que no son paralelogramos se clasifican en trapecios y trapezoides.



Trapecio

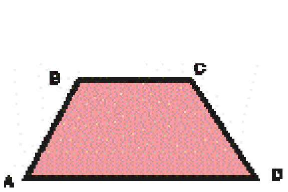
Se llama trapecio al cuadrilátero que tiene únicamente dos lados opuestos paralelos.

Así, el cuadrilátero de la figura es un trapecio, porque tiene paralelos únicamente los lados AD y BC.

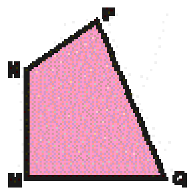
Los lados paralelos se llaman bases del trapecio.
AD es la base mayor del trapecio; BC es la base menor del trapecio.

Clasificación de los trapecios

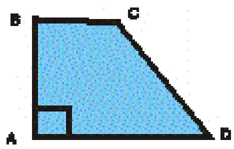
Cuando el trapecio tiene los lados no paralelos congruentes, se llama trapecio isósceles; en caso contrario, trapecio escaleno. Dentro de los trapecios escalenos, puede ocurrir que uno de los lados no paralelos sea perpendicular a las bases, y en tal caso se dice que el trapecio es rectángulo.



Trapecio isósceles



Trapecio escaleno



Trapecio escaleno rectángulo

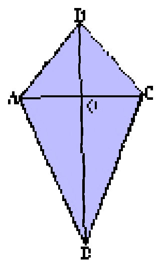
Trapezoide

Es el cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.
El cuadrilátero MNPQ es un trapezoide, pues no tiene ningún par de lados paralelos.

Cometa

Se llama así al trapezoide que tiene dos lados consecutivos congruentes y los otros dos lados distintos de los anteriores, pero también congruentes entre sí.
El cuadrilátero ABCD de la figura es una cometa, por no tener lados paralelos y ser:

AB = BC
AD = CD



La diagonal de la cometa que une los vértice a que concurren los pares de lados congruentes se llama diagonal principal.
En la cometa considerada, BD es la diagonal principal.

Propiedad de la cometa: La diagonal principal de la cometa es bisectriz de los ángulos cuyos vértices une, y corta perpendicularmente a la otra diagonal en el punto medio.

Ejercicios

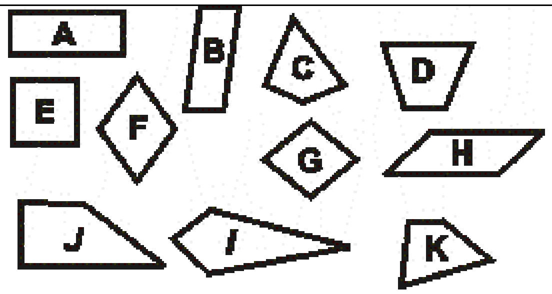
11. Subraya la respuesta correcta:

a) Las diagonales del rectángulo ...
   - Tienen igual medida.
   - No son perpendiculares.
   - Se cortan en el punto medio.

b) Los ángulos opuestos de un rombo son ...
   - De igual medida.
   - Distinta medida.

c) Cuadrilátero que tiene sus lados opuestos congruentes ...
   - Cuadrado.
   - Cometa.
   - Paralelogramo.

12. Clasifica los cuadriláteros siguientes:



Completa la tabla, colocando en cada columna la letra correspondiente al cuadrilátero que cumpla la condición indicada:

Con los lados paralelos		Sin lados paralelos
Un solo par	Dos pares	

13. Marca con una X las propiedades que cumplen las diagonales

	Trapecio	Romboide	Rombo	Paralelo-gramo	Rectángulo	Cuadrado
Son congruentes						
Son perpendiculares						
Una de ellas corta a la otra en punto medio						
Cortan mutuamente en el punto medio						

14. Completa la tabla siguiente:

Propiedad	Cuadrilátero(s) que cumple(n) dicha propiedad
Diagonales iguales	
Todos sus lados iguales	
Lados opuestos iguales	
Sus diagonales se cortan en el punto medio	
Diagonales perpendiculares	
Ángulos opuestos iguales	
Sus diagonales son bisectrices	
Una diagonal corta a la otra en su punto medio y viceversa	
Todos sus lados desiguales	
Sólo dos ángulos interiores congruentes	
La suma de sus ángulos exteriores es 360º	
Sin ángulos interiores congruentes	

6. RECUBRIMIENTOS DEL PLANO CON POLÍGONOS

El arte de los recubrimientos, o teselaciones, del plano mediante figuras poligonales tiene una historia tan antigua como la propia civilización. Diversos e imaginativos patrones han decorado las construcciones y objetos más diversos (muros, alfombras, ventanales, etc.). En tiempos recientes el interés por las teselaciones ha ido más allá de su interés puramente decorativo. Por ejemplo, en metalurgia y cristalografía interesa saber cómo se disponen de manera natural de una forma periódica. En arquitectura interesa conocer cómo se pueden combinar componentes estructurales simples para crear complejos constructivos más grandes, y los fabricantes de ordenadores esperan poder integrar los patrones de circuitos electrónicos simples para formar potentes procesadores, como son las redes neuronales. El análisis matemáticos de los patrones de recubrimientos es una respuesta a estas necesidades contemporáneas. Al mismo tiempo la creación y exploración de las teselaciones o recubrimientos del plano proporciona un contexto interesante para la investigación geométrica y la resolución de problemas en las clases de matemáticas de educación primaria y secundaria.

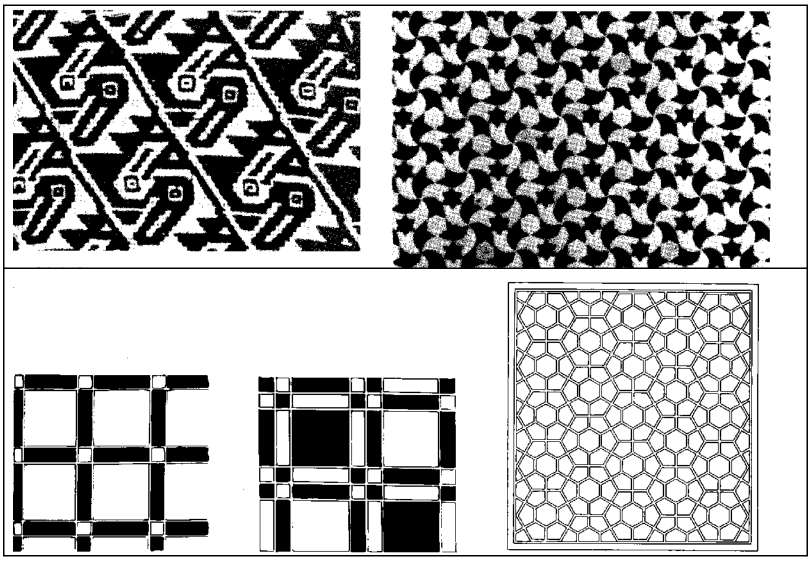


Fig. 16: Ejemplos de teselaciones

El diccionario de la Real Academia Española de la Lengua indica que la palabra tesela (del latín, **tessella**) significa "*Cada una de las piezas cúbicas de mármol, piedra, barro cocido o cualquier otra material, con que los antiguos formaban los pavimentos de mosaico*"

Desde un punto de vista matemático más general consideramos que una tesela es “cualquier curva cerrada simple, con su interior”. Un conjunto de teselas forma una teselación de una figura si dicha figura está completamente cubierta por las teselas sin solapamientos de puntos interiores de dichas figuras.

El caso particular de recubrimientos del plano que nos interesa son los formados por polígonos; la figura que se recubre suele ser el plano completo.

6.1. Teselaciones poligonales del plano

¿Qué polígonos, por sí mismos, cubren el plano sin dejar huecos ni solapamientos? La respuesta a esta pregunta pasa por estudiar los ángulos de tales polígonos, y tratar de sumar con ellos 360º en torno a un vértice. Empecemos por el triángulo. Sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es de 180º. Dibujemos un triángulo en el que marcamos los ángulos con 1, 2 y 3, y hagamos suficientes copias de él. La experiencia consiste en recortar dichos triángulos y colocarlos de forma que, en torno a un vértice, obtengamos 360º para cubrir el plano sin dejar huecos ni solapamientos.

Tres de ellos los podemos unir colocando en torno a un vértice cada uno de los tres ángulos del triángulo, que sabemos suman 180º y repetirlo dos veces (Fig. 17)

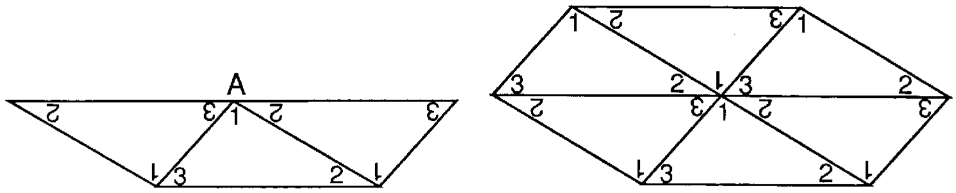


Fig. 17:

Repitiendo el proceso se consigue una teselación triangular (Fig. 18).

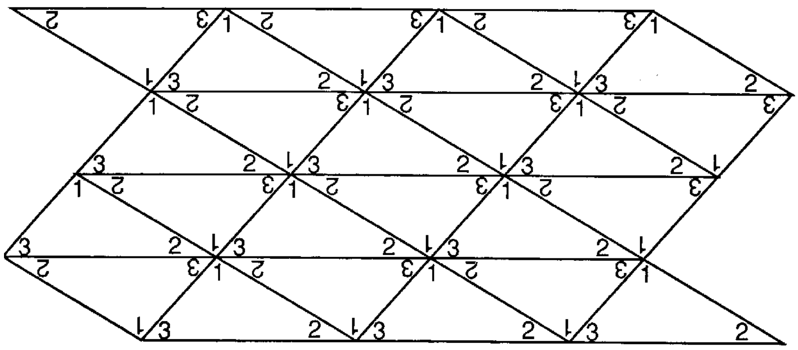


Fig. 18:

Ejercicio:

15. Repite el proceso anterior con un cuadrilátero cualquiera (trapezoide), marca los ángulos y comprueba si cualquier cuadrilátero tesela por sí mismo el plano.

¿Qué ocurre con el pentágono? Dibujemos un pentágono cualquiera. Después de marcar los ángulos y recortarlo, coloquemos los ángulos de manera contigua, como indica la figura 19. Veremos que no es posible obtener 360º en torno a un vértice.

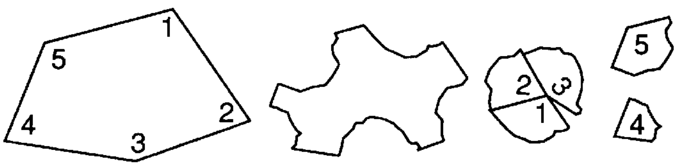


Fig. 19:

¿Le ocurre lo mismo a

todos los pentágonos? ¿Qué ocurre con el pentágono regular? El ángulo interior vale 108º, y por tanto no podemos conseguir 360º. ¿Significa esto que no existen teselaciones pentagonales? La figura20 nos sacará de dudas.

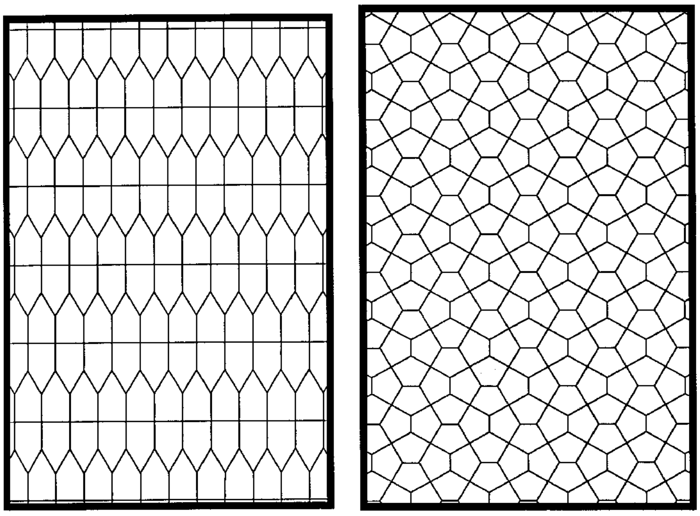


Fig. 20: Teselaciones pentagonales (no regulares)

Una forma de obtener hexágonos es uniendo dos cuadriláteros. Sabemos que los cuadriláteros sí teselan el plano por sí mismos. Partiendo de una teselación de cuadriláteros, podemos remarcar parejas de cuadriláteros contiguos y borrar el lado común (Fig. 21).

Podemos comprobar así que estos hexágonos especiales, obtenidos uniendo dos cuadriláteros, también teselan el plano.

¿Qué características tienen estos hexágonos? ¿Qué ocurre con el caso del hexágono regular? Dado que el ángulo interior de un hexágono regular es de 120º, con tres de ellos podemos obtener 360º alrededor de un vértice. A este tipo de teselaciones con un solo tipo de polígonos regulares se les llama teselaciones regulares.

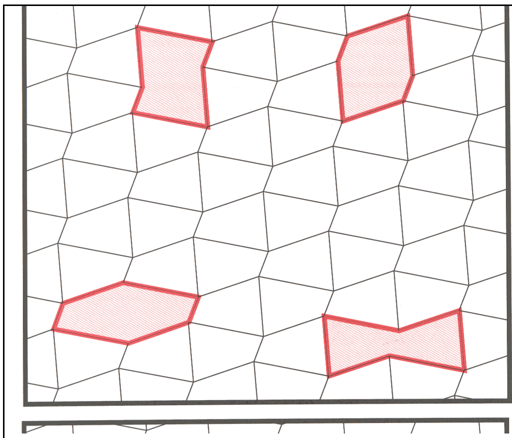


Fig. 21: Teselación de cuadriláteros

Ejercicio:

16. Investiga otras teselaciones regulares distintas de las descritas.

6.2. Teselaciones semirregulares

Si utilizamos diversos tipos de polígonos regulares, podemos indagar las combinaciones de ellos que producen un cubrimiento del plano. Para ello debemos conocer los ángulos interiores de algunos polígonos regulares, valores que tienes en la tabla siguiente:

Polígono	Nº de lados	Ángulo interior
Triángulo	3	60
Cuadrado	4	90
Pentágono reg.	5	108
Hexágono reg.	6	120
Heptágono reg.	7	128 4/7
Octógono reg.	8	135
Nonágono reg.	9	140
Decágono reg.	10	144
Dodecágono reg.	12	150
Pentadecágono reg.	15	156
Octadecágono reg.	18	160
Icógono	20	152

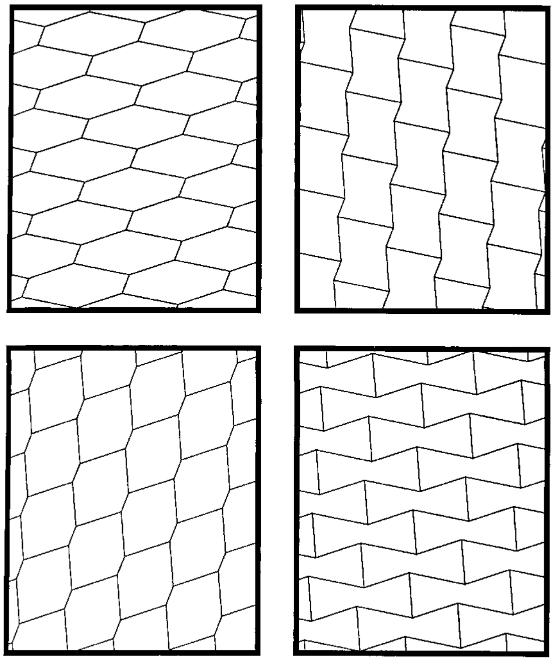


Fig. 22: Teselación de hexágonos formados con dos cuadriláteros

Algunas de esas combinaciones dan lugar a teselaciones con todos los vértices iguales. Esas teselaciones les llamamos semirregulares, y son 8 (Fig. 23). Las series de números puestos debajo de cada figura indican el orden de colocación de los distintos polígonos (3.3.3.4.4, quiere decir que se unen tres triángulos seguidos y a continuación dos cuadrados)

En cambio existen otras combinaciones de polígonos regulares que cubren el plano pero no producen vértices idénticos. Algunas de esas combinaciones están en la figura 24.

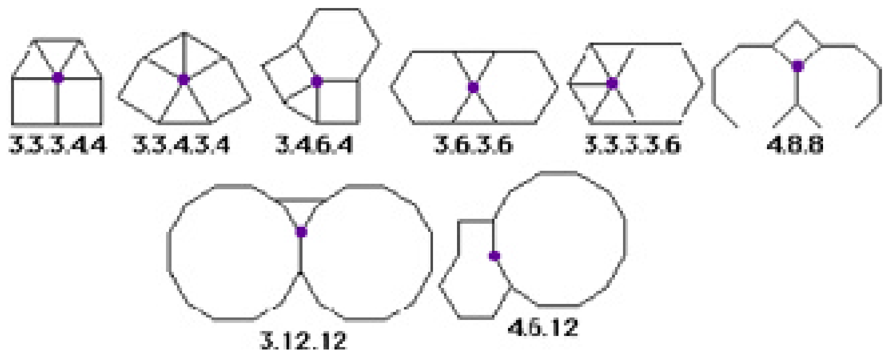


Fig. 23.Combinaciones de polígonos regulares que originan teselaciones semirregulares

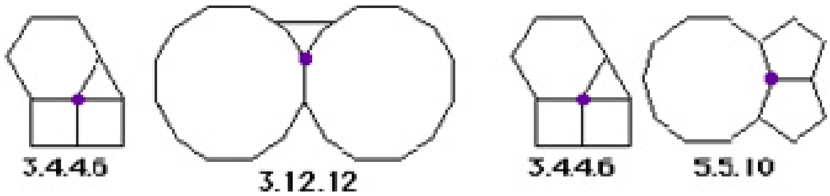


Fig.24. Combinaciones de polígonos regulares que NO originan teselaciones semirregulares

Un recubrimiento del plano formado por más de un tipo de polígono regular y con idénticos vértices de figura se dice que es un recubrimiento semirregular. Esta condición adicional sobre los vértices de figura supone que los mismos tipos de polígonos deben concurrir en cada vértice, y deben ocurrir en el mismo orden.

Se puede demostrar que existen 18 modos de formar vértices de figuras con polígonos regulares de dos o más tipos. De estas 18 formas, ocho corresponden a teselaciones semiregulares, que son las indicadas en la figura 25.

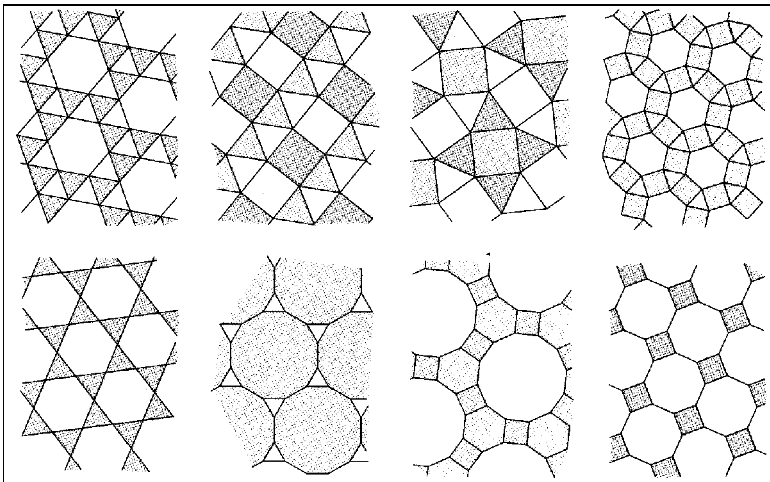
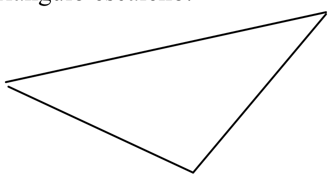


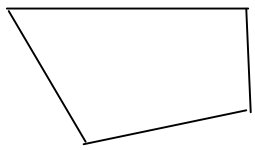
Fig. 25: Las ochos teselaciones semiregulares

Ejercicio:
17. ¿Cuáles de los siguientes polígonos recubren el plano? (Reproduce en cartulina las figuras y experimenta con ellas)

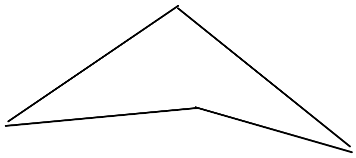
(a) Triángulo escaleno:



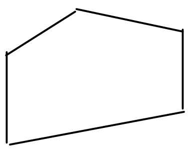
(b) Cuadrilátero convexo:



(c) Cuadrilátero no convexo



(d) Pentágono con un par de lados parelelos:



7. FIGURAS EN EL ESPACIO

7.1 Planos y líneas en el espacio

Cada plano separa los puntos del espacio en tres conjuntos disjuntos: el propio plano y dos regiones llamados *semiespacios*. Dos planos en el espacio pueden tener una interección común, que será una recta, o bien ser disjuntos, en cuyo caso se dice que son *paralelos*. El ángulo formado por dos planos que se cortan se llama *ángulo diedro*. La medida de dicho ángulo es la correspondiente al ángulo formado por dos semirectas contenidas en los semiplanos que lo forman y que sean perpendiculares a la recta de intersección correspondiente.

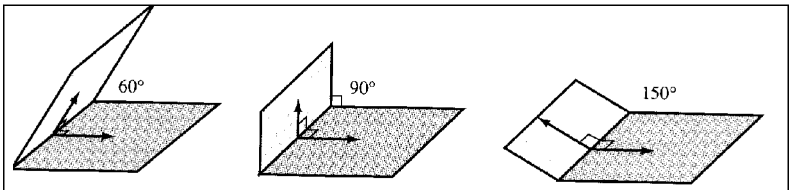


Fig. 26: Ángulos diedros y sus medidas

Dos líneas que no se cortan en el espacio se dice que son paralelas si están contenidas en el mismo plano; si no están en el mismo plano se dice que se cruzan. Una línea *l* que no corta a un plano P se dice que es paralela al plano. Una línea *m* es perpendicular a un plano Q en el punto A si cada línea del plano que pasa por A forma con *m* un ángulo recto.

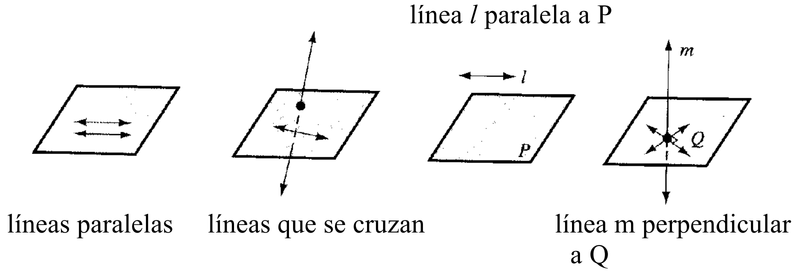


Fig. 27 : Líneas y planos en el espacio

7.2. Curvas, superficies y sólidos

El concepto intuitivo de curva se puede extender del plano al espacio imaginando figuras dibujadas por un lápiz "mágico" cuyos puntos dejan un trazo visible en el aire.

Cualquier superficie sin agujeros y que encierra una región hueca -su interior- se dice que es una *superficie cerrada simple*.

La unión de todos los puntos de una superficie cerrada simple y todos los puntos de su interior forman una figura espacial llamada un *sólido*.

Una superficie cerrada simple es *convexa* si el segmento que une cualquier par de puntos de la superficie está contenido en el interior de dicha superficie; esto es, el sólido limitado por la superficie es un conjunto convexo en el espacio. Por ejemplo, la esfera, que es el conjunto de puntos situados a una distancia constante de un punto fijo (el centro), es convexa.

7.3. Los poliedros y su clasificación

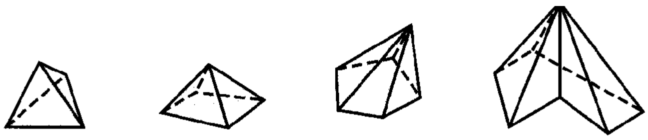
En la Naturaleza existen objetos con formas poliédricas. Por ejemplo, en cristalografía (cristales), biología (virus, radiolarios), las colmenas de las abejas en forma de rombododecaedros, con la fachada hecha de celdillas hexagonales, etc. También encontramos poliedros en obras y actividades realizadas por el hombre, como en el Arte, Arquitectura, Escultura, Artesanía, ... Los poliedros fueron estudiados por filósofos y matemáticos célebres como Platón, Euclides, Arquímedes, Kepler, Poincaré, Hilbert, Coxeter, ...

Definición:

Un poliedro es el sólido delimitado por una superficie cerrada simple formada por regiones poligonales planas. Cada región poligonal se dice que es una cara del poliedro, y los vértices y lados de las regiones poligonales se dicen que son los vértices y lados del poliedro.

En las figura 28 se muestran tipos de *pirámides* y *primas* que son ejemplos de poliedros.

Pirámides:



Prismas rectos y oblicuos:

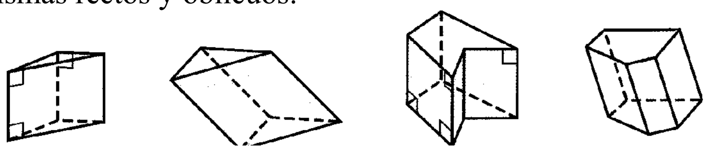


Fig. 28

Ejercicio:

18. Imagínate un prisma hexagonal regular recto.
a) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos diedros formados por las caras que se cortan?
b) ¿Cuántos pares de planos paralelos contienen a las caras de este prisma?

Para clasificar los poliedros podemos atender a diversos criterios, como por ejemplo, la regularidad y número de caras que concurren en los vértices.Otros criterios de clasificación de los poliedros son:

- Inclinación (rectos y oblicuos)
- Poliedros con bases (con una base, o varias bases)
- Según la construcción del modelo
    - Con polígonos regulares (Poliedros regulares, semirregulares, deltaedros)
    - Con polígonos iguales (Poliedros de caras iguales: Poliedros regulares, deltaedros, bipirámides de base regular)
    - Con vértices iguales (Poliedros. regulares, semirregulares, prismas rectos de base regular, ...)
- Combinaciones de distintos criterios
- Ejes y planos de simetría, diagonales, ángulos.

7.3.1. Poliedros regulares:

Un poliedro regular es un poliedro con las siguientes características:
- la superficie es convexa;
- las caras son regiones poligonales regulares congruentes;
- concurren el mismo número de caras en cada uno de los vértices.

La suma de los ángulos interiores de los polígonos que forman las caras de un poliedro regular que concurren en un mismo vértice debe ser menor de 360º, de lo contrario no podrían cerrar un espacio interior. Los ángulos interiores del triángulo equilátero miden 60º; por tanto, podemos formar poliedros regulares cuyas caras son triángulos cuando ponemos 3, 4 o 5 de tales triángulos concurriendo en cada vértice, ya que la suma de sus ángulos cumple la condición indicada. Esos poliedros son el *tetraedro*, el *cubo* y el *icosaedro*.

Con caras que sean cuadrados sólo se puede formar el *hexaedro* o *cubo*, en el que concurren 3 cuadrados en cada vértice. Si utilizamos pentágonos regulares como caras de un poliedro se obtiene el *dodecaedro*.

Ejercicio:

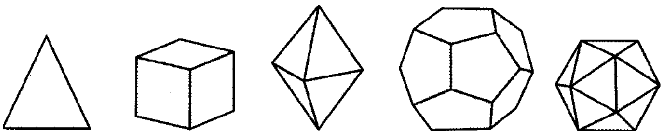
19. Completa el cuadro adjunto y responde a las siguientes cuestiones:

Tipo de caras (ángulo interior)	nº de caras por vértice	Suma de los ángulos en cada vértice	Símbolo del poliedro	nº de caras	nº de vértices	nº de aristas	C+V-A	Nombre
Triángulo equilátero (60º)	3	180º	{3,3,3}	4	4	6	2	Tetraedro
	4							
	5							
	6							
Cuadrado (90º)	3							
	4	360º						Cubo
Pentágono (108º)	3							
	4							
Hexágono (120º)	3							

a) ¿Cómo varía el ángulo de los polígonos regulares a medida que aumenta el número de lados?
b) ¿Podrías formar un poliedro uniendo 4 cuadrados por cada vértice? ¿Por qué?
c) ¿Qué condición crees que se debe exigir a este proceso para poder obtener un poliedro regular?
d) ¿Qué ocurre en el caso de los hexágonos regulares?
e) ¿Puede existir un poliedro regular formado solamente con hexágonos regulares? ¿Y con heptágonos regulares? ¿Por qué?
f) ¿Cómo es en cada caso la columna que mide C+V-A (nº de caras +nº de vértices menos el de aristas)? ese número constante se llama característica de Euler. Calcula ese número para otros poliedros que conozcas que no sean regulares. ¿Qué obtienes?

Ejercicio:

20. Demuestra que sólo existen cinco poliedros regulares basándote en la suma de los ángulos de las caras que concurren en los vértices.



Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

La fórmula de Euler para los poliedros:

Teorema:
En cualquier poliedro se cumple que la suma del número de vértices y el de caras es igual al número de aristas más 2.

Ejercicio:

21. Comprueba que el teorema de la fórmula de Euler es cierto para los poliedros regulares, para una pirámide pentagonal y un prisma hexagonal.

Utilizando el teorema de Euler, vamos a demostrar que *solo existen 5 poliedros regulares convexos.*
Llamemos:

C = nº de caras de n lados (n> 2)
V = nº de vértices de orden m (m>2)
A = nº de aristas

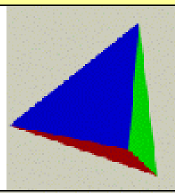
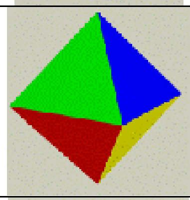
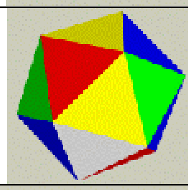
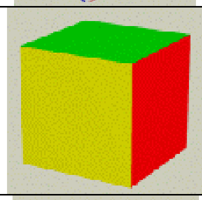
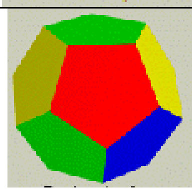
Debido al teorema de Euler se cumple
(1) C + V – A = 2;
El número de aristas A lo podemos expresar de dos formas, en función de las caras C y de los vértices V:

(2) $A = \frac{nC}{2}$ (cada arista pertenece a 2 caras)

$A = \frac{mV}{2}$ (cada arista une 2 vértices)

Sustituyendo (1): $\frac{2A}{n} + \frac{2A}{m} - A = 2 \Rightarrow$ 2mA + 2nA –mnA =2mn;
Sacando factor común y operando:
A (2m + 2n –mn) = 2mn ;
2m + 2n –mn>0 por ser A>0 y 2mn>0
2m + 2n –mn –4 > -4 $\Rightarrow$ -(m-2)(n-2) > -4;
(m-2)(n-2) < 4

Dando valores enteros a n y m (con n >2; m>2):

n	M	Resultados en **(m-2)(n-2) < 4**	Poliedro (nº de polígonos por vértice)	Figura
	3		**Tetraedro** (3 triángulos)	
3	4	1(m-2)< 4; m<6 m =3, 4, 5	Octaedro (4 triángulos)	
	5		**Icosaedro** (5 triángulos)	
4	3	2(m-2)<4 ⇒ m<4 ⇒ m=3	Cubo (3 cuadrados)	
5	3	3(m-2)<4 ⇒ m<4/3 + 2=10/3 ⇒ m=3	**Dodecaedro** (3 pentágonos)	
6		(m-2)4<4⇒ 4m<12 ⇒ m<3	**no existe**	

Vemos que para 6 o más caras por vértice obtenemos que debe ser m<3, es decir, el número de vértices por cara es menor que 3, lo que no es posible, ya que 3 es el número mínimo de vértices de una cara.

7.3.2. Dualidad de poliedros

Compara el número de caras del cubo con el número de vértices del octaedro. Vemos que coinciden. Es decir, si intercambiamos caras por vértices, obtenemos los mismos datos numéricos, ya que el número de aristas es el mismo en ambos poliedros. Si encajamos un poliedro en el otro (Fig. 29) vemos que los vértices de uno se sitúan en los centros de las caras del otro. Estos dos poliedros, que pertenecen a la misma familia, se dicen que son duales.

Ejercicio:

22. Observa la tabla anterior y obtén otros pares de poliedros duales.

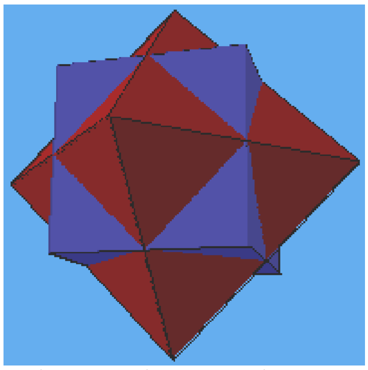


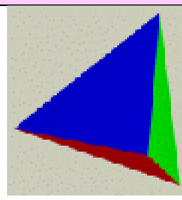
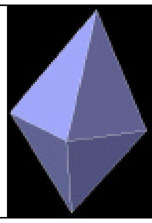
Fig. 29: Cubo y octaedro. Dos poliedros duales

7.3.3. Deltaedros

La letra griega *delta* mayúscula (Δ) recuerda la forma de los triángulos, por ello se le da el nombre de deltaedros a los poliedros que se forman solamente con caras triangulares. Si los triángulos son equiláteros se dice que el deltaedro es regular.

Ejercicios:

23. Identifica los **deltaedros regulares** que ya conozcas.
Ayúdate de troqueles de cartulina de triángulos equiláteros para construir deltaedros convexos, completa la tabla y responde a las siguientes preguntas:

Caras	Vértices	Aristas	Orden de los vértices				Nombre	Figura
			3	4	5	6		
4	4	6	4	0	0	0	Tetraedro	
5								
6	5	9	2	3	0	0	Bipirámide triangular	
7								
8								
9								
10								
11								
12								

¿Existen deltaedros convexos con un número impar de caras?
¿Existen deltaedros convexos con más de 20 de caras?
¿Existe un deltaedro convexo con 18 caras?
¿Has desarrollado algún procedimiento para construir un deltaedro partiendo del inmediato anterior?

7.3.4. Poliedros semirregulares o Arquimedianos

Los poliedros regulares cumplen las tres condiciones de regularidad (caras regulares e iguales y vértices iguales). Si prescindimos de la condición de igualdad de caras, los poliedros resultantes tienen un grado menor de regularidad, y se llaman semirregulares o arquimedianos (en honor de Arquímedes).

Ejercicio:

24 ¿Conoces algún poliedro semirregular? ¿Puedes imaginar un prisma que sea semirregular?

Existen solamente 13 de ellos (además de los infinitos prismas y antiprismas que son semirregulares). Un método para conseguir algunos de estos poliedros partiendo de los poliedros regulares es mediante el proceso de truncamiento.

Un tipo de truncamiento consiste en cortar las aristas que concurren en cada vértice por un plano de manera que la sección producida sea un polígono regular cuyo lado sea de la misma longitud que el resto de las aristas. Así, por ejemplo, al truncar el tetraedro de esta manera se obtienen triángulos de cada vértice y hexágonos de cada una de las caras (Fig. 30).

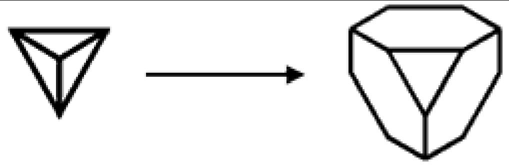


Fig. 30: Del tetraedro se obtiene el tetraedro truncado

Ejercicio:

25. ¿Qué poliedro obtenemos si cortamos las aristas del tetraedro por sus puntos medios?

Este mismo proceso lo podemos hacer con el cubo. Se obtienen triángulos equiláteros de cada vértice y octógonos de cada cara.

Ejercicio:

26. ¿Qué poliedro obtenemos si cortamos las aristas del cubo por sus puntos medios? Y si hacemos ese proceso con el octaedro?

Fíjate en la figura 31 y comprueba cómo se obtiene un poliedro, el cuboctaedro, igualmente del cubo que del octaedro.

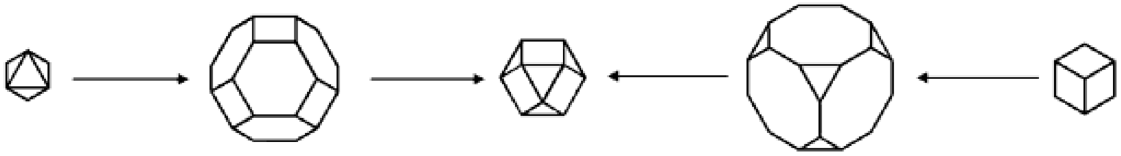


Fig.31: Partiendo del cubo y del octaedro se obtienen el cubo truncado, el octaedro truncado y el cuboctaedro.

En la figura 32 puedes ver unos modelos de poliedros semirregulares obtenidos del truncamiento de poliedros regulares, y en la figura 33 puedes contemplar toda la colección de los 13 poliedros arquimedianos.

Figura 32

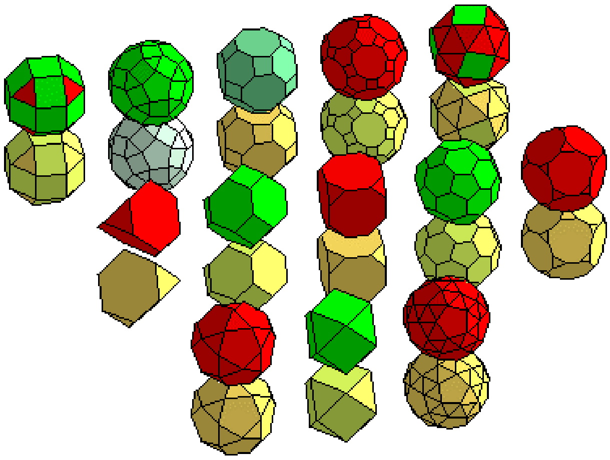


Fig. 33. Poliedros semirregulares

7.4. Conos y cilindros

Los conos y los cilindros son sólidos o cuerpos geométricos que generalizan las pirámides y los prismas, respectivamente. Un *cono* tiene una base que es cualquier región limitada por una curva cerrada simple contenida en un plano. La *superficie lateral* está generada por los segmentos que unen un punto fijo (el *vértice*) no situado en el plano de la base con los puntos de la curva que delimita la base. La figura 34 muestra un cono circular recto, oblicuo y un cono general. La altura del cono es el segmento AB que une el vértice A del cono y un punto B de la base de manera que AB es perpendicular al plano que contiene la base.

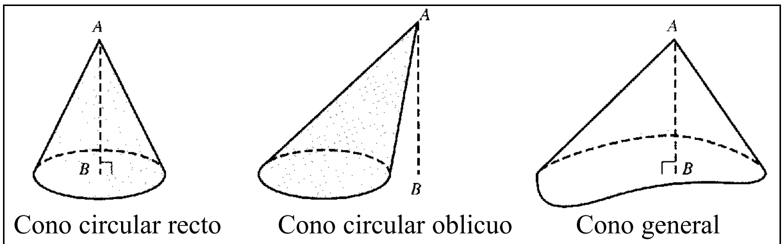


Fig. 34: Conos

Un *cilindro* es el sólido cuya superficie se genera trasladando los puntos de una región cerrada simple contenida en un plano hacia un plano paralelo. La figura 35 muestra ejemplos de cilindros. Los puntos que unen puntos correspondientes en las curvas que limitan las bases formal la *superficie lateral*. Si los segmentos que unen puntos correspondientes en las dos bases son perpendiculares a los planos de las bases se dice que el cilindro es *recto*, en caso contrario se trata de un cilindro *oblicuo*.

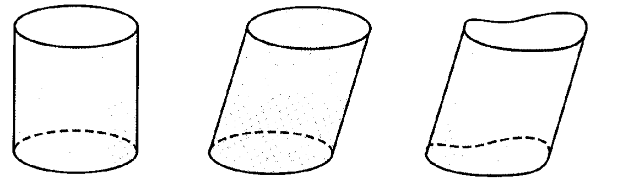
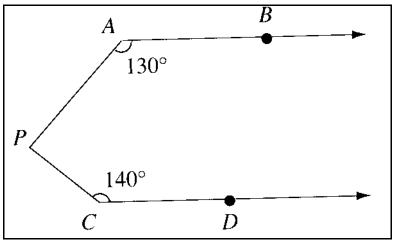


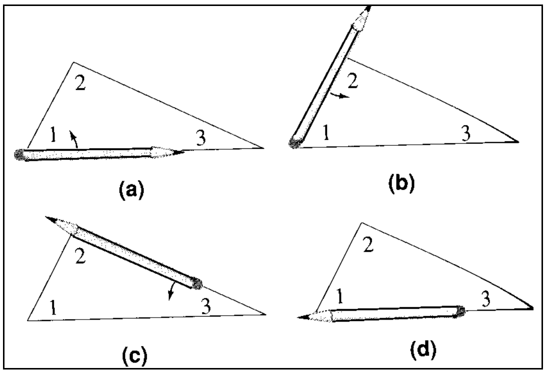
Figura 35. Cilindros

8. TALLER MATEMÁTICO

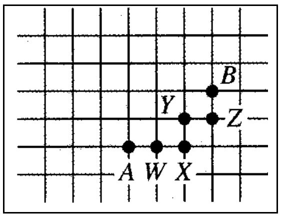
1. Determinar la medida del ∠P si las rectas AB y CD son paralelas.



2. ¿Qué proposición se está demostrando en la siguiente secuencia de dibujos? Explícalo con un breve párrafo.



3. En la llamada "geometría del taxi" (taxi-geometría) los "puntos" son los vértices de una rejilla cuadrangular que representa en el plano los "bloques de la ciudad" . En la figura adjunta el viaje más corto para ir de A a B debe recorrer 5 bloques, y por esto la "taxi-distancia" de A a B es 5. Un "taxi-segmento" es el conjunto de puntos situados sobre un trayecto de mínima distancia desde A hasta B, por lo que {A, W, X, Y, Z, B} es un taxi-segmento de A a B.



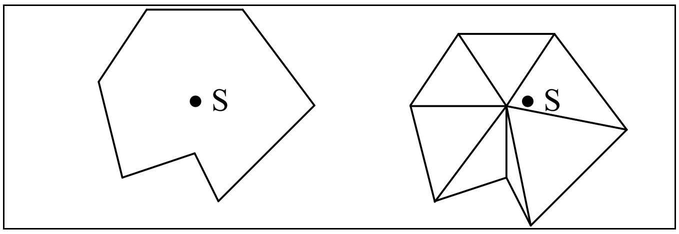
a) ¿Cuántos taxi-segmentos unen A y B?
b) Encontrar todos los puntos que están a una taxi-distancia de 5 desde A. ¿Se parecen los "taxi-círculos" a los círculos trazados con el compás?
c) Utilizar lápices de diferentes colores para dibujar los taxi-círculos concéntricos de radios 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Describir el patrón que aparece.

4. Resuelve los siguientes ejercicios sobre medidas de los lados y ángulos en los cuadriláteros:
1. En un trapecio rectángulo la medida de uno de sus ángulos interiores es 58º. ¿Cuánto miden los otros ángulos interiores?
2. En un romboide la medida de uno de sus ángulos exteriores es 137º. Determina la medida de todos los ángulos interiores de ese romboide.
3. ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado cuya diagonal mide 12 cm.?
4. Determina la diagonal del rectángulo cuyos lados miden 5 cm. y 12 cm.
5. Determina la suma de las diagonales del cuadrado cuyo lado mide 8 cm.
6. Señala el tipo de triángulo que se determina al trazar las diagonales de un cuadrado.
7. En un rombo, una diagonal es el doble de la otra. Determina el perímetro del rombo sabiendo que la diagonal menor mide 6 cm.
8. Dos cuadrados de 80 cm. de perímetro se unen de manera que forman un rectángulo. Determina la medida de la diagonal del rectángulo formado.

5. Dibujar figuras que satisfagan las siguientes condiciones:
a) Una curva cerrada no simple poligonal de 4 lados
b) Un pentágono no convexo
c) Un cuadrilátero equiángulo
d) Un octógono convexo

6. La media aritmética de la medida de los ángulos interiores de polígono de n lados es de 175º.
a) ¿Cuántos lados tiene)
b) Supongamos que el polígono tiene uniones flexibles en los vértices. Si el polígono se deforma de manera rígida, ¿qué ocurre con la medida media de los ángulos interiores? Explica tu razonamiento.

7. El polígono de la izquierda de la figura adjunta contiene un punto S en su interior que se puede unir a los vértices mediante segmentos interiores al polígono. Al trazar todos estos segmentos obtenemos una triangulación del interior del polígono. Trazando un punto S en el interior de un polígono de n lados, explicar cómo usar la triangulación que se obtiene para deducir la fórmula (n-2).180º para la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono.



8.Un espacio unidimensional está formado por los puntos de una única recta. Si quitamos un punto de la recta se forman dos partes disjuntas, y al quitar dos puntos se forman tres partes disjuntas de la recta. En un espacio de dos dimensiones (un plano), si suprimimos una recta se obtienen dos regiones disjuntas (semiplanos). Al suprimir dos líneas no paralelas el plano queda dividido en cuatro regiones disjuntas.

	Número de puntos suprimidos de la recta o número de líneas suprimidas del plano								
	0	1	2	3	4	5	6	7	.... n
Número de partes de la recta que se forman	1	2	3						
Número de partes del plano que se forman	1	2	4						

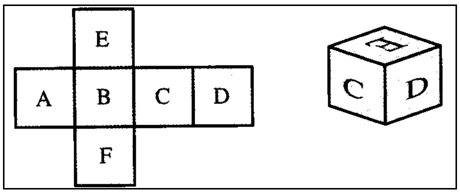
a) Completar la primera fila de la tabla.
b) Trazar tres, cuatro o cinco rectas en el plano que tengan una posición general, de manera que ningún par de líneas sean paralelas, ni tres líneas sean concurrentes. Contar el número de regiones que determinan y completar las tres casillas siguientes en la segunda fila de la tabla.
c) Encontrar cuántas regiones se forman a partir de diez rectas en una posición general (tratar de encontrar un patrón en la tabla)
d) Encontrar una fórmula para el número de regiones que determinan n líneas en posición general.

9. Un tetraminó es una tesela formada uniendo cuatro cuadrados congruentes, de manera que los cuadrados adyacentes deben tener un lado común.
a) Formar los cinco tetraminós con formas diferentes.
b) ¿Se puede recubrir un rectángulo de 4 por 5 con los cinco tetraminós?

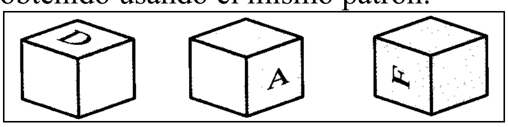
10. Recortar en cartulina varias copias de un hexágono convexo no regular que tenga cada par de lados opuestos congruentes y paralelos.
a) ¿Se puede recubrir el plano con estas teselas? ¿Es necesario rotar el hexágono para ponerlo en las posiciones sucesivas?
b) Repetir la actividad anterior pero tomando un hexágono convexo con sólo un par de lados opuestos que sean congruentes y paralelos.

11. Para cualquier entero *n*, $n \geq 3$, demostrar que existe algún polígono de *n* lados que recubre el plano.

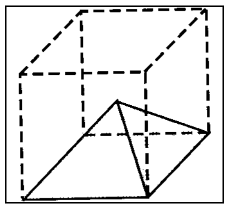
12. El patrón dibujado en la parte izquierda de la figura permite construir el cubo de la derecha.



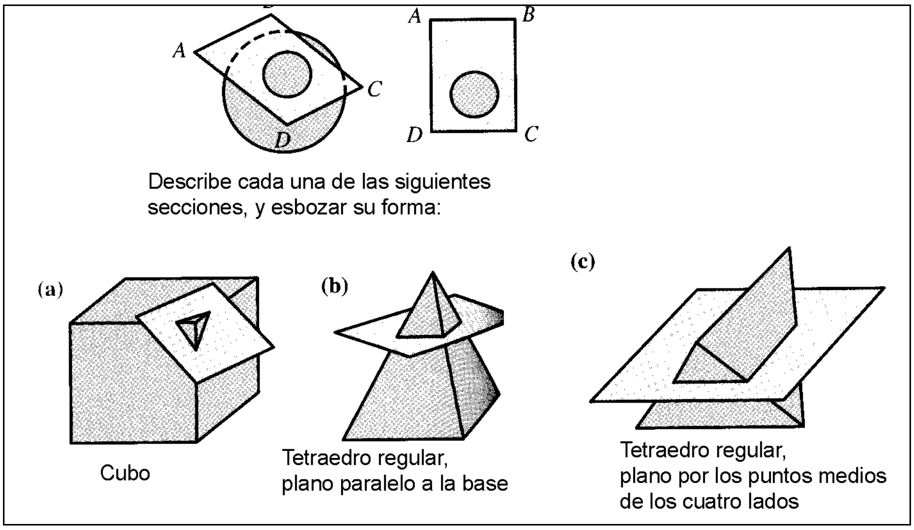
Dibujar la letra, en su posición correcta, que debe aparecer en cada una de las caras del cubo que se muestra que ha sido obtenido usando el mismo patrón:



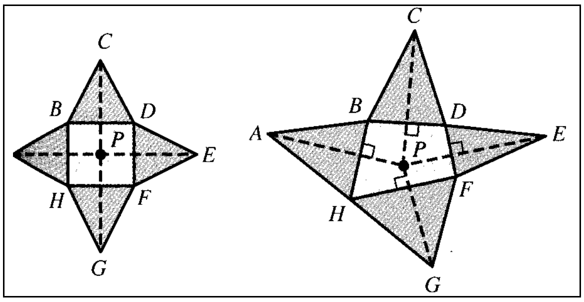
13. El vértice de la pirámide que muestra en la figura adjunta está en el centro del cubo trazado en líneas de puntos. ¿Cuál es el ángulo diedro que forma cada cara lateral de la pirámide con (a) la base cuadrangular (b) una cada lateral adyacente?



14. La intersección de un plano y una figura tridimensional produce una figura plana que se llama sección transversal. Por ejemplo, la sección transversal de una esfera es un círculo como se muestra en la figura.

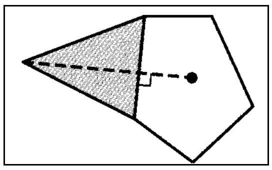


15. La figura adjunta (a la izquierda) muestra el desarrollo de una pirámide cuadrangular y a la derecha el desarrollo de una pirámide cuya base es un cuadrilátero. El punto P en cada desarrollo corresponde a la posición en el plano de la base de la proyección vertical del vértice de la pirámide.



a) Explicar por qué AB = BC, CD = ED, ..., GH = HA en los desarrollos y por qué las líneas de trazos que parten de P son perpendiculares a los lados de la base del polígono.

b) La figura adjunta es parte de un desarrollo de una pirámide pentagonal. Completar el desarrollo sobre una cartulina. Recortar y doblar el patrón para ver el cuerpo que resulta.



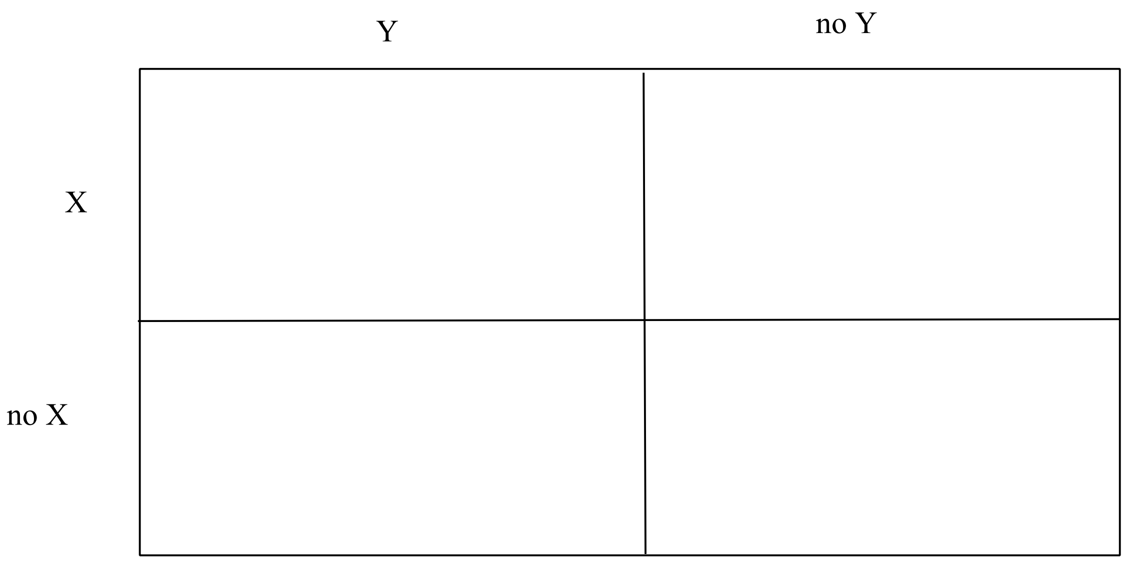
16. Considera las siguientes tres afirmaciones sobre un poliedro:

X = Todas las caras son regulares

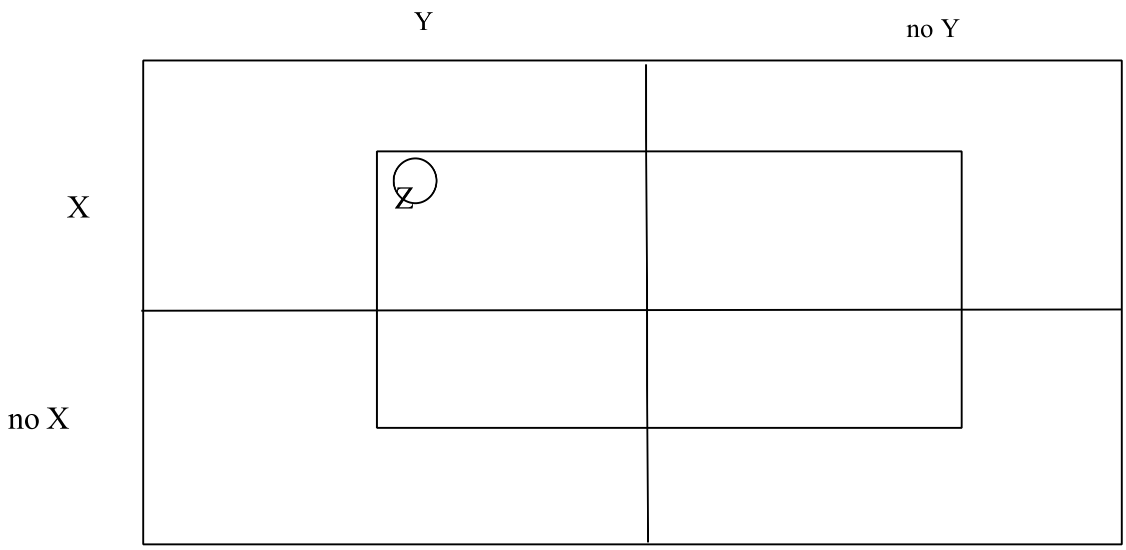
Y = Todas las caras son iguales

Z = Todos los vértices son iguales (mismo nº y tipo de cara)

Escribe en cada una de las casillas del cuadro siguiente el nombre de algunos poliedros que conozcas:



17. Repite el ejercicio anterior en el cuadro siguiente,



Identifica cada zona del dibujo mediante una serie de tres unos o ceros, según cumpla o no las propiedades X, Y, Z. Así la región 111 se distingue por cumplir X, Y, Z, mientras que la región 010 cumple NO X, Y, y No Z.
Escribe cada una de las 8 regiones y cita ejemplos de poliedros que situarías en ellas.

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

El Diseño Curricular Base para la Educación Primaria propuesto por el MEC para el área de Matemáticas incluye entre los diez objetivos generales de la educación matemática para este nivel uno que hace mención expresa a la geometría:

9. Identificar formas geométricas en su entorno inmediato, utilizando el conocimiento de sus elementos, propiedades y relaciones entre las mismas para incrementar su comprensión de dicho entorno y desarrollar nuevas posibilidades de acción en el mismo.

El desarrollo de los diez objetivos se organiza en cinco bloques de contenido, entre los cuales dos se refieren a contenidos de geometría. En cada uno de ellos se especifican un listado de "*conceptos, hechos y principios*", "*procedimientos*" y "*actitudes, valores y normas*".

En el bloque 4 se abordan los contenidos relacionados con las formas planas y espaciales. Se encuentra especialmente relacionado con los bloques de "Medida: información cuantitativa sobre los objetos y el tiempo" y de "Organización y representación en el espacio". Se pretende reconocer e identificar cuerpos y formas geométricas sencillas desde perspectivas diferentes, establecer relaciones entre ellos y sus elementos, representar formas y construir cuerpos, y por último, llegar a su descripción completa. Se dará gran importancia a la adquisición de los contenidos actitudinales como medio de exploración y acceso a los contenidos conceptuales.

Hechos, conceptos y principios

1. Formas planas.
• Las figuras y sus elementos (polígonos y circunferencia).
• Relaciones entre los elementos de una figura y de las figuras entre si.
• Regularidades y simetrías.
• Suma de los ángulos de un triángulo.
2. Formas espaciales.
• Los cuerpos geométricos *y* sus elementos: vértices, aristas *y* caras.
• Cubo, esfera, prismas, pirámides, conos *y* cilindros.
• Relación entre los elementos del cubo.
• Regularidades *y* simetrías.

Procedimientos

1. Descripción de la forma de objetos familiares utilizando adecuadamente el vocabulario geométrico básico.
2. Construcción de figuras geométricas planas (polígonos y circunferencias) a partir de datos previamente establecidos.
3. Construcción de cuerpos geométricos.
4. Comparación y clasificación de figuras planas y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios.
5. Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y

descomposición.
6. Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos.
7. Trazado de una figura simétrica de otra respecto d eun elemento dado (puntos y ejes de simetría)
8. Utilización de los instrumentos de dibujo (regla,compás, escuadra, cartabón, círculo graduado) para la construcción y exploración de formas geométricas.

Actitudes, valores y normas

1. Curiosidad e interés por identificar formas y relaciones geométricas en los objetos del entorno.
2. Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas relacionadas con la organización y utilización del espacio.
3. Gusto por la precisión en la descripción y representación de formas geométricas.
4. Disposición favorable para la utilización de los instrumentos convencionales de dibujo y para la búsqueda de instrumentos alternativos.

1.2. Principios y Estándares 2000 del NCTM

Los Principios y Estándares 2000 proponen que los programas de enseñanza de matemáticas desde la educación infantil hasta el bachillerato deben capacitar a todos los alumnos para,

- analizar las características y propiedades de los objetos de dos y tres dimensiones y desarrollar argumentos sobre las relaciones geométricas;
- especificar posiciones de los objetos en el espacio y describir relaciones espaciales usando la geometría de coordenadas y otros sistemas de representación;
- aplicar transformaciones geométricas y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas;
- usar la visualización, el razonamiento espacial y la modelización geométrica para resolver problemas (NCTM 2000, p. 41).

En el cuadro siguiente resumimos la concreción de estos objetivos generales a los niveles de educación infantil y primaria (K-5 en la terminología de EE.UU.). La formulación de estándares para el grado 6º está ligado a los grados 7º y 8º en esta propuesta curricular.

Objetivos generales	Infantil a 2º curso	3º a 5º curso
<u>Analizar características</u> y propiedades de las formas geométricas bi y tridimensionales y desarrollar argumentos matemáticos sobre las relaciones geométricas.	- reconocer, nombrar, construir, dibujar, comparar y clasificar formas bi y tridimensionales; - describir atributos y partes de las formas bi y tridimensionales - investigar y predecir los resultados de agrupar y separar formas bi y tridimensionales.	- identificar, comparar, y analizar atributos de las formas bi y tridimensionales y desarrollar el vocabulario para describir los atributos; - clasificar formas bi y tridim. Según sus propiedades y formular definiciones de clases de formas tales como triángulos y pirámides; - investigar, describir y razonar sobre los resultados de subdividir, combinar y transformar formas; - explorar la congruencia y semejanza de figuras; - formular y probar conjeturas sobre propiedades y relaciones geométricas y

		desarrollar argumentos lógicos para justificar conclusiones.
Especificar posiciones y describir relaciones espaciales usando la geometría de coordenadas y otros sistemas de representación.	- describir, nombrar e interpretar las posiciones relativas en el espacio y aplicar ideas sobre posición relativa; - describir, nombrar e interpretar la dirección y distancia en el movimiento espacial y aplicar ideas sobre dirección y distancia; - encontrar y nombrar posiciones con relaciones simples, como "cerca de" y en sistemas de coordenadas tales como en los mapas.	- describir posiciones y movimientos usando el lenguaje común y el vocabulario geométrico; - construir y usar sistemas de coordenadas para especificar posiciones y describir trayectorias; - encontrar la distancia entre puntos en las direcciones horizontal y vertical del sistema de coordenadas.
Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.	- reconocer y aplicar traslaciones, giros y simetrías; - reconocer y crear formas que tengan simetría.	- predecir y describir los resultados de deslizar, voltear y girar formas bidimensionales; - describir un movimiento o una serie de movimientos que muestren que dos formas son congruentes; - identificar y describir las simetrías en formas y figuras bi y tridimensionales.
Usar la visualización, el razonamiento espacial y la modelización geométrica para resolver problemas.	- crear imágenes mentales de las formas geométricas usando memoria espacial y visualización espacial; - reconocer y representar formas en diferentes perspectivas; - relacionar las ideas geométricas con las ideas sobre números y medidas; - reconocer formas y estructuras en el entorno y especificar su localización.	- construir y dibujar objetos geométricos; - crear y describir imágenes mentales, patrones y trayectorias; - identificar y construir objetos tridimensionales a partir de sus representaciones bidimensionales; - identificar y dibujar una representación bidimensional de un objeto tridim.; - usar modelos geométricos para resolver problemas en otras áreas de las matemáticas, tales como números y medida; - reconocer ideas geométricas y relaciones y aplicarlas a otras disciplinas y a problemas que surgen en la clase o en la vida diaria.

Ejercicio 1:
Analizar las diferencias y semejanzas de las orientaciones curriculares propuestas para el estudio de las figuras geométricas en:
- Diseño Curricular Base (MEC)
- Orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

2.1. Las investigaciones de Piaget sobre el desarrollo de conceptos geométricos[1]

Las primeras interacciones del niño pequeño con su entorno, previas al desarrollo del lenguaje, se basan casi totalmente en experiencias espaciales, muy en particular a través de los sentidos de la vista y el tacto. Más tarde se desarrolla el lenguaje y adquiere significado en el seno y en el contexto del entorno físico.

Piaget, como resultado de sus numerosos experimentos propuso una teoría del desarrollo de los conceptos espaciales en el niño. Distingue entre *percepción*, que define como el "conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos", y *representación* (o imagen mental), que "comporta la evocación de objetos en ausencia de ellos". Las capacidades de percepción del niño se desarrollan hasta la edad de dos años (estadio 'sensoriomotor'), mientras que la capacidad de reconstrucción de imágenes espaciales comienza hacia la edad de dos años, y en la mayoría de los casos es perfeccionada desde los siete años en adelante en el niño medio (el período de 'operaciones concretas'). Mientras que los tests de "percepción" pueden fundarse en la capacidad de discriminación entre diferentes objetos presentados visualmente, los tests de "representación" (imaginería mental) de que se vale Piaget se fundan en la capacidad para identificar formas al tacto y en la capacidad para reproducir formas mediante palillos o dibujos.

En cada uno de estos estadios de desarrollo, Piaget distingue, además, una progresiva diferenciación de propiedades geométricas, partiendo de aquellas propiedades que él llama *topológicas*, o sea, propiedades globales independientes de la forma o el tamaño, como son las siguientes:

- cercanía ("proximidad"); por ejemplo, dibujar un hombre con los ojos juntos, aun cuando éstos puedan haber sido situados por debajo de la boca;
- separación; por ejemplo, no traslapar la cabeza y el cuerpo;
- ordenación; por ejemplo, dibujar la nariz entre los ojos y la boca;
- cerramiento, como dibujar los ojos dentro de la boca;
- continuidad, como hacer que los brazos formen un continuo con el tronco y no con la cabeza.

El segundo grupo de propiedades que según Piaget distinguen los niños son las que denomina propiedades *proyectivas*, que suponen la capacidad del niño para predecir qué aspecto presentará un objeto al ser visto desde diversos ángulos. Por ejemplo, los niños pequeños pueden querer dibujar una cara de perfil y seguir, sin embargo, poniendo dos ojos en ella; o pueden no ser capaces de darse cuenta de que al mirar un lápiz desde un extremo se verá un círculo. La "rectitud" es una propiedad proyectiva, dado que las líneas rectas siguen mostrando aspecto rectilíneo cualquiera que sea el punto de vista desde el que se las observe.

El tercer grupo de propiedades geométricas son las euclídeas, esto es, las relativas a tamaños, distancias y direcciones, que conducen por lo tanto a la medición de longitudes, ángulos, áreas, etc. Se pueden distinguir, por ejemplo, un trapecio y un rectángulo basándose en los ángulos y en las longitudes de los lados. (Desde el punto de vista proyectivo, ambas figuras son equivalentes, ya que el tablero de una mesa rectangular ofrece aspecto de trapecio visto desde ciertos ángulos). Los niños pueden en este estadio reproducir la posición exacta de un punto en una página, o una figura geométrica, y decidir qué líneas y ángulos han de medir para ello[2].

---

[1] Dickson et al. (1991, p. 22-23).

[2] Remitimos al lector al libro citado de Dickson et al. (1991, p. 25-26) para conocer algunas críticas y revisiones de la teoría de Piaget sobre el desarrollo del pensamiento espacial de los niños.

2.2. El modelo de los niveles de van Hiele

En la didáctica de la geometría ha tenido una fuerte influencia el trabajo desarrollado por Pierre van Hiele y Dina van Diele-Geldof para comprender y orientar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes. El modelo teórico conocido como de "los niveles de van Hiele" comenzó a proponerse en 1959 y ha sido objeto de abundantes experimentaciones e investigaciones que han llevado a introducir diversas matizaciones, pero que aún continúa siendo útil para organizar el currículo de geometría en la educación primaria y secundaria.

En este modelo se proponen cinco niveles jerárquicos para describir la comprensión y el dominio de las nociones y habilidades espaciales. Cada uno de los cinco niveles describe procesos de pensamiento que se ponen en juego ante tareas y situaciones geométricas. A continuación describimos brevemente las características de los cinco niveles y los tipos de actividades que pueden desarrollarse en cada uno de ellos[3].

Nivel 0: Visualización:
Los objetos de pensamiento en el nivel 0 son formas y se conciben según su apariencia

Los alumnos reconocen las figuras y las nombran basándose en las caracteristicas visuales globales que tienen. Los alumnos que razonan según este nivel son capaces de hacer mediciones e incluso de hablar sobre propiedades de las formas, pero no piensan explícitamente sobre estas propiedades. Lo que define una forma es su apariencia. Un cuadrado es un cuadrado "porque se parece a un cuadrado". Debido a que la apariencia es el factor dominante en este nivel, esta apariencia puede llevar a atribuir propiedades impertinentes a las formas. Por ejemplo, un cuadrado que se ha girado 45º respecto de la vertical puede que no se considere un cuadrado por un sujeto de este nivel. "Pongo estas formas juntas porque tienen el mismo aspecto", sería una respuesta típica.

Los productos del pensamiento del nivel 0 son clases o agrupaciones de formas que parecen ser "similares".

Nivel 1: Análisis
Los objetos de pensamiento en el nivel 1 son clases de formas, en lugar de formas individuales.

Los estudiantes que razonan según este nivel son capaces de considerar todas las formas incluidas en una clase en lugar de una forma singular. En lugar de hablar sobre este rectángulo, es posible hablar sobre todos los rectánculos. Al centrarse en una clase de formas, los alumnos son capaces de pensar sobre lo que hace que un rectángulo sea un rectángulo (cuatro lados, lados opuestos paralelos, lados opuestos de la misma longitud, cuatro ángulos rectos, diagonales congruentes, etc.). Las características irrelevantes (como el tamaño o la orientación) pasan a un segundo plano. Los estudiantes comienzan a darse cuenta de que una colección de formas pertenecen a la misma clase debido a sus propiedades. Si una forma pertenece a la clase de los cubos, tiene las propiedades correspondientes a esa clase. "Todos los cubos tienen seis caras congruentes, y cada una de estas caras es un cuadrado". Estas propiedades estaban como implícitas en el nivel 0. Los sujetos del nivel 1 pueden ser capaces de listar todas las propiedades de los cuadrados, rectángulos, y paralelogramos, pero no ver las relaciones de incluión entre estas clases, que todos los cuadrados son rectángulos y todos los rectángulos son paralelogramos. Cuando se les pide que definan una forma, es probable que listen todas las propiedades que conozcan.

Los productos del pensamiento del nivel 1 son las propiedades de las formas.

[3] Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (4ª edición). New York: Longman.

Nivel 2: Deducción informal
Los objetos del pensamiento del nivel 2 son las propiedades de las formas

A medida que los estudiantes comienzan a ser capaces de pensar sobre propiedades de los objetos geométricos sin las restricciones de un objeto particular, son capaces de desarrollar relaciones entre estas propiedades. "Si los cuatros ángulos son rectos, la figura es un rectángulo. Si es un cuadrado, todos los ángulos son rectos. Si es un cuadrado, entonces debe ser un rectángulo". Con una mayor capacidad de usar el razonamiento "si – entonces", las figuras se pueden clasificar usando sólo un mínimo de características. Por ejemplo, cuatro lados congruentes y al menos un ángulo recto puede ser suficiente para definir un cuadrado. Los rectángulos son paralelogramos con un ángulo recto. Las observaciones van más allá de las propias propiedades y comienzan a centrarse en argumentos lógicos sobre las propiedades. Los estudiantes del nivel 2 serán capaces de seguir y apreciar un argumento deductivo informal sobre las formas y sus propiedades. "Las demostraciones" pueden ser más de tipo intuitivo que rigurosamente deductivas. Sin embargo, se entiende que un argumento lógico tiene características que obligan a aceptar la conclusión. La comprensión de la estructura axiomática de un sistema deductivo formal no llega a alcanzarse.

Los productos de pensamiento del nivel 2 son relaciones entre propiedades de los objetos geométricos.

Nivel 3: Deducción
Los objetos de pensamiento en el nivel 3 son relaciones entre propiedades de los objetos geométricos.

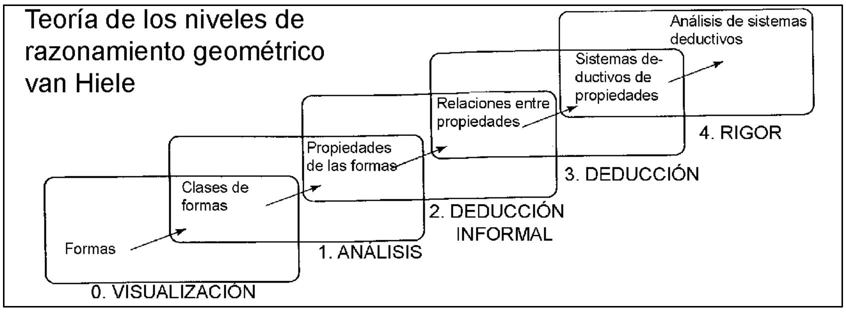
En este nivel los estudiantes son capaces de examinar algo más que las propiedades de las formas. Su pensamiento anterior ha producido conjeturas sobre relaciones entre propiedades. ¿Son correctas estas conjeturas? ¿Son verdaderas? A medida que tiene lugar este análisis de los argumentos informales, la estructura de un sistema completo de axiomas, definiciones, teoremas, corolarios, y postulados comienza a desarrollarse y puede ser considerada como el medio necesario para establecer la verdad geométrica. Los sujetos de este nivel comienzan a apreciar la necesidad de construir un sistema lógico que repose sobre un conjunto mínimo de supuestos y a partir del cual se deriven todas las proposiciones. Estos estudiantes son capaces de trabajar con enunciados abstractos sobre propiedades geométricas y llegar a conclusiones basadas más sobre la lógica que sobre la intuición. Este es el nivel requerido en los cursos de geometría de bachillerato. Un estudiante operando en este nivel 3 puede observar claramente que las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio, de la misma manera que lo puede hacer un estudiante situado en un nivel inferior. Sin embargo, en el nivel 3, se aprecia la necesidad de probar esta proposición a partir de una serie de argumentos deductivos. El estudiante del nivel 2 puede seguir el argumento, pero no reconoce la necesidad de hacer la demostración deductiva.

Los productos del pensamiento del nivel 3 son sistemas axiomáticos deductivos para la geometría.

Nivel 4: Rigor
Los objetos de pensamiento del nivel 4 son sistemas axiomáticos para la geometría.

En el nivel máximo de la jerarquia de pensamiento geométrico propuesto por van Hiele, el objeto de atención son los propios sistemas axiomáticos, no las deducciones dentro de un sistema. Se aprecian las distinciones y relaciones entre los diferentes sistemas axiomáticos. Este es el nivel requerido en los cursos universitarios especializados en los que se estudia la geometría como una rama de las matemáticas.

Los productos de pensamiento del nivel 4 son comparaciones y contrastes entre diferentes sistemas axiomáticos de geometría.



Características de los niveles

La principal característica de este modelo de pensamiento geométrico es que en cada nivel (excepto en el 4º) se deben crear unos objetos (ideas) de manera que las relaciones entre estos objetos se convierten en los objetos del siguiente nivel. Hay por tanto un progresivo ascenso en la abstracción y complejidad de los conocimientos que se ponen en juego. Además de este rasgo el modelo postula las siguientes características:

1. Los niveles son secuenciales. Para lograr un cierto nivel superior al 0 los alumnos deben superar los niveles previos. Esto implica que el sujeto ha experimentado el pensamiento geométrico apropiado para ese nivel y ha creado en la propia mente los tipos de objetos o relaciones que son el foco de atención del pensamiento del nivel siguiente.
2. Los niveles no son dependientes de la edad en el sentido de los estadios de desarrollo de Piaget. Un alumno de tercero de primaria puede estar en el nivel 0 al igual que uno de bachillerato. Algunos estudiantes y adultos pueden permanecer siempre en el nivel 0, y un número importante de personas adultas no alcanzan nunca el nivel 2. Sin embargo, la edad está relacionada con la cantidad y tipo de experiencias geométricas que tenemos. Por tanto, es razonable aceptar que todos los niños de preescolar a 2º curso de primaria estén en el nivel 0, así como que la mayoría de los niños de 3º y 4º.
3. La experiencia geométrica es el principal factor que influye en la progresión de niveles. Las actividades que permiten a los niños explorar, hablar sobre las experiencias, e interactuar con el contenido del siguiente nivel, además de incrementar sus experiencias con el nivel en que se encuentran, proporcionan la mejor oportunidad de avanzar hacia el siguiente nivel.
4. Cuando la instrucción o el lenguaje usado está a un nivel superior al que tiene el estudiante, habrá un fallo en la comunicación. Los estudiantes a los que se pide enfrentarse con objetos de pensamiento que no han construido en el nivel anterior puede sean forzados a un aprendizaje memorístico y alcanzar sólo temporalmente un éxito superficial. Un estudiante puede, por ejemplo, memorizar que todos los cuadrados son rectángulos sin haber construido esa relación, o bien puede memorizar una demostración geométrica pero fallar en crear los pasos exigidos o comprender la razón de ser del proceso.

Características de las actividades del Nivel 0

- Actividades de clasificación, identificación y descripción de formas variadas.
- Uso de gran cantidad de modelos físicos que se pueden manipular por los niños.
- Ejemplos de una variedad de formas diferentes con objeto de que las características irrelevantes no se perciban como importantes. (Esto evitará que, por ejemplo, muchos alumnos piensen que sólo los triángulos equiláteros son realmente triángulos, o que un cuadrado girado 45º deja de ser un cuadrado)

- Proporcionar oportunidades para que los alumnos construyan, dibujen, compongan o descompongan formas diversas.

Características de las actividades del Nivel 1

- Comenzar a centrar la atención más sobre las propiedades de las figuras que en la simple identificación. Definir, medir, observar y cambiar las propiedades con el uso de modelos concretos.
- Resolver problemas en los que las propiedades de las formas sean aspectos importantes a tener en cuenta.
- Seguir utilizando modelos concretos, como en las actividades del nivel 0, pero usando modelos que permitan la exploración de diversas propiedades de las figuras.
- Clasificar figuras usando las propiedades de las formas como también sus nombres. Por ejemplo, encontrar propiedades de los triángulos que hagan que unos sean similares y otros diferentes.

Características de las actividades del Nivel 2 (primer ciclo de educación secundaria)

- Continuar usando propiedades de los modelos, pero con la atención puesta en la definición de propiedades. Hacer listas de propiedades y discutir qué propiedades son necesarias y cuáles son condiciones suficientes para una forma o concepto específico.
- Comenzar a usar un lenguaje de naturaleza deductiva aunque informal: todos, algunos, ninguno, si entonces, qué ocurre si, etc.
- Investigar la validez de la inversión de ciertas relaciones. Por ejemplo, el enunciado inverso de "Si una figura es un cuadrado debe tener cuatro ángulos rectos" sería, "Si tiene cuatro ángulos rectos, entonces debe ser un cuadrado".
- Usar modelos y dibujos como herramientas con las que pensar, y comenzar a buscar generalizaciones y contraejemplos.
- Estimular la formulación y demostración de algunas hipótesis.

La mayor parte de los contenidos curriculares propuestos para los niveles de educación infantil y primaria se pueden adaptar a cualquiera de los tres primeros niveles, a excepción de conceptos abstractos tales como punto, recta, semirecta y plano como elementos básicos de las figuras geométricas. Estas ideas abstractas no son apropiadas incluso para el nivel 2.

El nivel 2 de razonamiento es más propio de los alumnos del primer ciclo de educación secundaria (12 a 14 años). Aquí los alumnos comienzan a usar razonamientos deductivos informales. Esto quiere decir que pueden seguir y usar argumentaciones lógicas, aunque pueden tener dificultades para construir una demostración por sí mismos. El uso de modelos físicos de los cuerpos y dibujos geométricos es todavía importante por diferentes razones. En el nivel 1, las exploraciones de los alumnos les llevan a realizar conclusiones inductivas sobre las formas. Estos estudiantes quedan satisfechos de que una afirmación es verdadera porque se cumple en los casos que comprueban. En el nivel 2, los alumnos pueden usar un dibujo para ayudarse en el seguimiento de una argumentación deductiva dada por el profesor. También pueden usar modelos para comprobar conjeturas o encontrar contraejemplos. Los modelos se convierten más en una herramienta para el pensamiento y la verificación que para la exploración.

3. SITUACIONES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

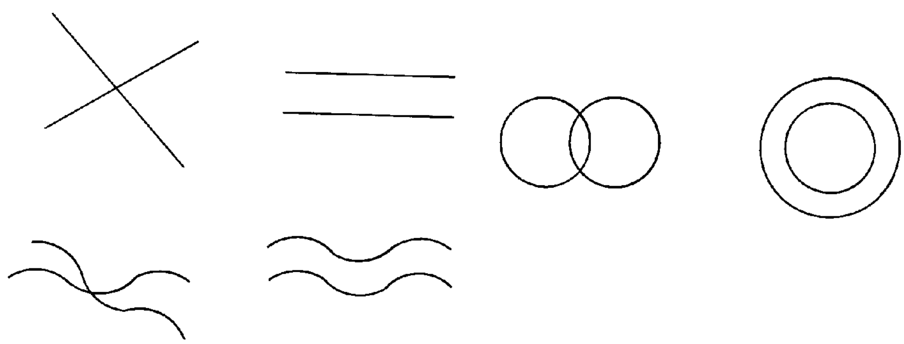
Las actividades que describimos en esta sección son algunos ejemplos que pueden usarse para el trabajo en las aulas de primaria y corresponden a los dos primeros niveles de van Hiele. Las actividades características del nivel 2 son más propias de atención en el primer ciclo de educación secundaria (alumnos de 12 a 14 años).

3.1. Juegos de psicomotricidad

Las situaciones de juegos de psicomotricidad parecen muy recomendables para iniciar el estudio de distintos aspectos de la geometría. En el libro de A. Martínez y F. Juan (1989) encontramos abundantes ejemplos de este tipo de situaciones, así como los fundamentos metodológicos en los que basan su propuesta curricular. A título de ejemplo, describimos, a continuación una situación de este tipo, que pretende familiarizar a los alumnos de infantil y primer ciclo de primaria con diferentes tipo de líneas y regiones planas. Se supone que los niños tienen posibilidad de moverse con libertad por una sala de dimensiones adecuadas.

Actividad 1: Líneas, regiones y psicomotricidad

- Nos movemos libremente por el espacio, al ritmo de una música.
- Nos movemos en grupos.
- Nos movemos en grupos de acuerdo con las líneas que se dibujan en la pizarra:



- Se reparten cuerdas de colores, una por niño. Jugamos con las acuerdas, con el movimiento de las cuerdas.
- Jugamos en grupos. Procuramos que no choquen las cuerdas. Procuramos que choquen.
- Formamos, con las cuerdas, una línea cerrada en el suelo, delimitando un territorio. Nos metemos dentro.
- Formamos, con otras cuerdas, o pintando con tiza en el suelo, líneas entre territorios, que serán caminos. Ponemos un camino entre cada dos territorios. Ponemos un aro en cada cruce de caminos. Cuando suene la música nos moveremos dentro de nuestro territorio o, si nos apetece, vamos por algún camino hasta otro territorio a bailar en él, con el grupo que allí está, si nos dejan. Cuando pasemos por un cruce daremos una palmada.

Remitimos al lector al libro citado de Martínez y Juan (1991, p. 63-66) para encontrar una rica colección de actividades complementarias de exploración de las nociones geométricas fundamentales en la clase de matemáticas.

3.2. Descripción y clasificación de objetos

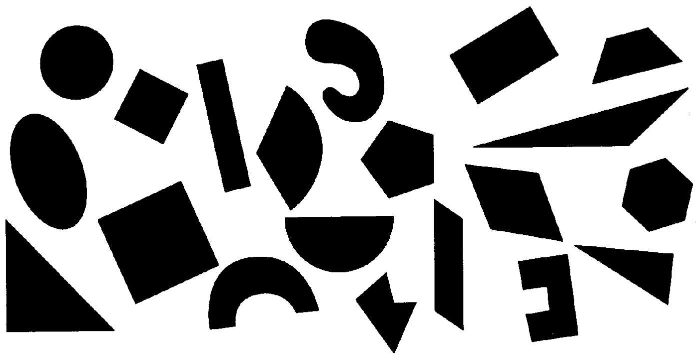
En las primeras actividades se debe partir del propio vocabulario que usan los niños para describir las formas geométricas, introduciendo nuevas palabras a medida que sea apropiado.

La realización de actividades como las siguientes puede ser ocasión de introducir los nombres usuales de los cuerpos geométricos.

Uno de los primeros tipos de actividades más importantes que se pueden proponer a los niños es ofrecerles la oportunidad de encontrar semejanzas y diferencias entre una gran variedad de formas. Muchos niños se centrarán en características no estándares como "puntiagudo" o "curvado", o "se parece a una casa". Otros observarán cosas que realmente no son parte de las formas: "señala hacia arriba", o "está cerca del borde la mesa".

Actividad 2: Clasificación de formas (nivel 0)

Preparar una amplia variedad de formas recortadas en cartulina, como se muestra en la figura (o cualquiera otras). Pedir a los alumnos que seleccionen una forma al azar y después encuentren otras formas que sean parecidas a la primera en algún aspecto. Si se pide formar un subconjunto de figuras cada vez se evita el problema de intentar poner cada forma en una categoría. Los estudiantes deben describir qué rasgo tienen las formas para considerarlas similares, bien oralmente o por escrito. Pedir finalmente que dibujen una nueva forma que se ajuste a la categoría y explicar por qué es de esa clase.



Si el conjunto de formas tiene cinco o seis ejemplos de una forma cuyo nombre es conocido (rectángulo o rombo), es probable que algunos estudiantes las clasifiquen según ese nombre. Pero se les puede pedir que encuentren otras formas que sean "parecidas" a la forma seleccionada. De esta manera, el concepto de esa clase particular de figuras se forma sin ninguna definición expresa. A continuación puede poner una etiqueta al concepto o proporcionar el nombre propio de la forma. Los nombres de las formas deberían siempre darse después de que el concepto de la forma se ha desarrollado.

La clasificación de formas se debe hacer también con formas tridimensionales, usando colecciones de objetos de madera, plástico, u objetos reales como botes, cajas, balones, etc.

Las actividades que corresponden al nivel 1 de razonamiento de van Hiele se centran más en las propiedades de las formas e incluyen algún análisis de dichas propiedades. Por ejemplo, en el nivel 0, los triángulos pueden haberse clasificado como "grandes" y "pequeños", "puntiagudo" o "no puntiagudo", o "con esquinas cuadradas" y "sin esquinas cuadradas". En el nivel 1, el mismo conjunto de triángulos se puede clasificar según el tamaño relativo de los ángulos o la longitud relativa de los lados.

La mayor parte de las actividades sugeridas para el nivel 0 se pueden extender fácilmente al nivel 1 cambiando las variables de la tarea.

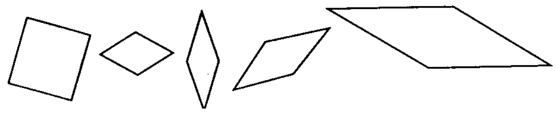
Actividad 3 (nivel 1)

Clasificar las formas por nombres de propiedades y no por nombres de las formas. Cuando se combinan dos o más propiedades, clasificar por una propiedad cada vez. "Encontrar todas las formas que tienen lados opuestos paralelos" (Una vez separadas) "Ahora encontrar las que también tienen un ángulo recto" (Ese grupo debería incluir los cuadrados y los rectángulos que no sean cuadrados). Después de obtenido este grupo de formas, discutir cuál es el nombre de esta clase de figuras. Intentar clasificar las formas por la misma combinación de propiedades pero en un orden diferente.

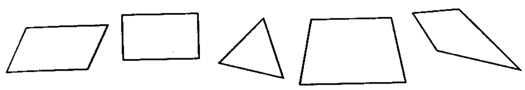
Usar cuerdas o redondeles para separar los conjuntos de formas. Poner dos lazos en el suelo. Hacer que los alumnos pongan dentro de uno de los lazos todas las formas que tengan cuatro lados congruentes y todos los que tengan un ángulo recto en el otro lazo. ¿Dónde colocar los cuadros? Los alumnos se darán cuentan que los dos lazos deben tener una parte común y colocar los cuadrados en la intersección.

Actividad 4: Definición misteriosa (nivel 1)

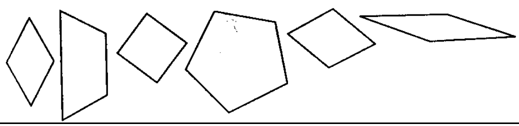
Todas estas figuras tienen algo en común:



Ninguna de éstas otras la tienen:



¿Cuál de las siguientes figuras tienen esa propiedad?



El nombre de una propiedad no es necesario para que sea comprendida. Requiere una observación cuidadosa de las propiedades para descubrir qué tienen en común las formas.

3.3. Construcción y exploración de polígonos

Interesa que los propios niños construyan y dibujen formas. En una primera fase harán formas de manera libre para pasar después a construir otras que cumplan algunas condiciones. Esto promoverá la reflexión sobre las propiedades implicadas y estimulará el paso al nivel 1 de razonamiento sin necesidad de presionar a los niños de manera forzada. Los materiales para realizar estas construcciones pueden ser variados, bien del entorno escolar o bien comerciales (plastilina, cartulina, bloques encajables, trangram, geoplanos, etc.)

3.2.1. Uso del geoplano en el estudio de los polígonos

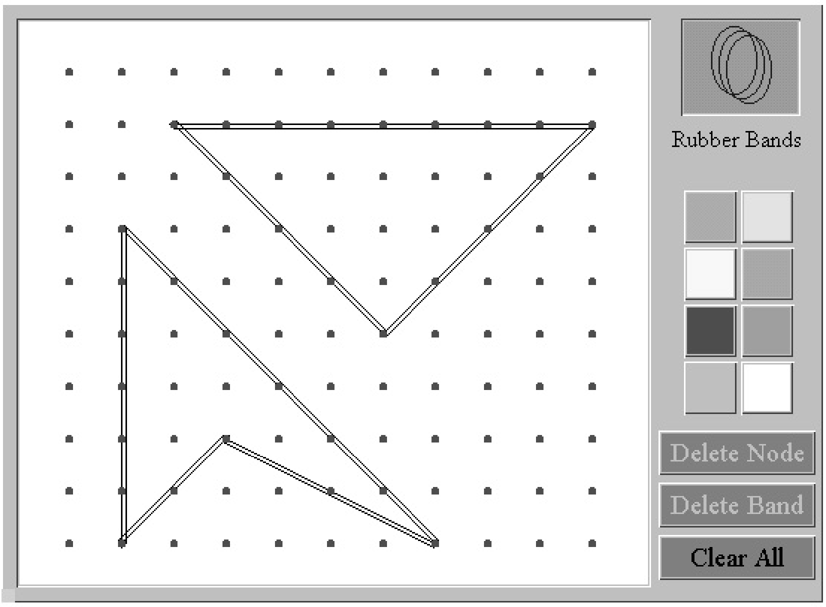
Incluimos en esta sección la descripción del uso del geoplano, bien en su versión manipulativa o virtual (mediante un programa de ordenador), para el estudio de las figuras geométricas planas, en particular el triángulo y los polígonos. Seguiremos la descripción que se hace en la sección de Recursos para la enseñanza de los Principios y Estándares 2000 del NCTM donde es posible utilizar un "geoplano virtual" de una manera interactiva. El geoplano interactivo virtual está disponible en la siguiente dirección web: http://standards.nctm.org/

En el ejemplo se describen actividades usando el geoplano interactivo para ayudar a los estudiantes a identificar figuras geométricas simples, describir sus propiedades, y desarrollar el sentido espacial. La primera parte titulada "Construyendo triángulos" centra la atención sobre el concepto de triángulo, ayudando a los estudiantes a comprender el uso de la palabra 'triángulo' en matemáticas y la noción de congruencia en geometría. En la segunda parte, "Construyendo polígonos", los estudiantes construyen y comparan una variedad de polígonos, describiendo las propiedades características de las formas que crean.

Actividad 5

Construye tantos triángulos como sea posible, de formas y tamaños diferentes, usando para cada uno de ellos una sola goma (o banda) sobre el geoplano. Explica a tu compañero en qué se diferencian estos triángulos y en qué se parecen.

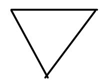
Geoplano interactivo

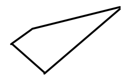


Hablando sobre triángulos en la clase

A los estudiantes les interesa trabajar con los geoplanos, tanto si son virtuales como concretos. Como ocurre con cualquier material manipulativo, los estudianes necesitan un cierto tiempo para explorar el material antes de realizar tareas específicas.

La mayor parte de los alumnos de los niveles de preescolar a 2º curso de primaria conocen la palabra 'triángulo' y tienen una idea de lo que significa. Sin embargo, la descripción que hacen del triángulo puede que no corresponda con la convencional. Para estimular a los niños a centrarse en las propiedades del triángulo, los maestros pueden pedir que hagan triángulos diferentes en el geoplano y después seleccionar uno para mostrar a la clase. Los niños pueden comparar los triángulos que han hecho en sus geoplanos y discutir si cada forma es o no un triángulo. Algunos niños pueden pensar que un triángulo con un vértice orientado hacia la base del geoplano no es realmente un triángulo. El maestro puede provocar a los niños para que justifiquen su manera de pensar, incitando a los niños que estén más retraidos a que entren en la discusión con comentarios tales como, "¿Dices que Marco sigue siendo Marco aunque esté haciendo el pino, o sea, que esto sigue siendo un triángulo? Otros alumnos pueden hacer figuras con cuatro lados que consideran como triángulos por su forma puntiaguda.





El maestro puede concluir la explicación diciendo que los matemáticos se han puesto de acuerdo en considerar como triángulos cualquier figura cerrada por tres segmentos. Usando esta definición el profesor puede pedir a los alumnos que comprueben otra vez las formas que han construido y deciden cuáles son triángulos. Esto da otra oportunidad para que los alumnos revisen sus primeras elecciones.

Los alumnos de estos primeros niveles pueden comprobar la congruencia de figuras en el plano moviendo una figura para que cubra exactamente a otra figura. Las figuras hechas en el geoplano se pueden describir con un sistema de coordenadas simples; por tanto dos figuras sobre el geoplano son congruentes si sus construcciones se pueden describir de la misma manera. Si se hacen figuras con dos geoplanos diferentes, uno de los geoplanos se puede mover de manera que eventualmente las construcciones se puedan ver de la misma manera (quizás mediante el volteo de la base por el lado opuesto, o una rotación de 90º). Los alumnos pueden copiar sus triángulos sobre un papel reticulado y después recortarlos de manera que puedan decidir si coinciden o no.

Experiencias de los alumnos con los geoplanos virtuales interactivos

El geoplano virtual permite a los estudiantes sombrear sus figuras y hacer una variedad mayor de triángulos que los permitidos con una geoplano tradicional de una matriz de 5x5 clavos. El maestro puede evaluar la comprensión de los alumnos de las propiedades del triángulo preguntándoles que expliquen cómo saben que todas las formas representadas son triángulos.

Ejercicio 2:

a) ¿Cuáles son algunas de las estrategias que puedes usar para ayudar a los alumnos a centrarse sobre las propiedades de los triángulos cuando construyen figuras de cuatro lados y las consideran como triángulos?

b) ¿Qué experiencias, conocimientos y vocabulario deberían tener los alumnos con el fin de que sean capaces de identificar y definir los triángulos?

c) ¿Cuáles son algunas de las actividades que los estudiantes de estas edades pueden realizar en las que se use la congruencia de figuras?

Actividad 6

Construye las siguientes figuras en el geoplano:

- Tantos cuadrados de distinto tamaño como sea posible
- Tantos hexágonos diferentes de distinto tamaño como sea posible
- El polígono con el menor número de lados que puedas hacer

- El polígono con el mayor número de lados que puedas hacer
- Polígonos con un número de lados entre el menor y el mayor posible.

Estudio de los polígonos en la clase

Por medio de discusiones informales en la clase en pequeños grupos, los maestros ayudan a los alumnos a aprender el vocabulario geométrico así como a aprender las propiedades de los diferentes polígonos. Algunas propiedades de las figuras serán más fáciles de identificar que otras cuando los alumnos tratan de crear una figura sobre el geoplano. Por ejemplo, los polígonos se forman con segmentos, lo que se modeliza mediante una goma o banda que conecta dos nodos, y los polígonos son figuras cerradas. Los alumnos pueden aprender los nombres de figuras específicas que construyen cuando hablan sobre los hexágonos que tienen seis lados y los cuadriláteros que tienen cuatro lados.

Los alumnos pueden construir su polígono favorito en el geoplano y describirlo a la clase. El maestro puede preguntar si dos figuras son congruentes y cómo pueden justificar los alumnos sus afirmaciones. Los alumnos pueden clasificar los polígonos y describir porqué se agrupan de una cierta manera .

El trabajo con el geoplano virtual hace que la exploración sea más fácil a los alumnos que tienen dificultades en el manejo de las gomas. Debido a que los alumnos tiene un área de trabajo más grande pueden hacer una variedad mayor de polígonos. Hay oportunidad de crear múltiples figuras cóncavas y convexas y verlas simultáneamente. El poder rellenar las figuras con colores ayuda a los alumnos más pequeños a observar el número de lados, y puesto que las figuras abiertas no se pueden sombrear, esto ayuda a comprender que los polígonos son figuras cerradas. Como ocurre con los geoplanos concretos, las lineas formadas por las bandas son rectas no curvadas.

Ejercicio 3:

¿De qué otra manera puedes ayudar a los alumnos a aprender las propiedades de los polígonos distinta del uso de los geoplanos?
¿Qué experiencias, conocimientos y vocabulario deberían tener los estudiantes con el fin de desarrollar la comprensión de las propiedades de los cuadriláteros?

Actividad 7: Desafío de propiedades (nivel 1-2)

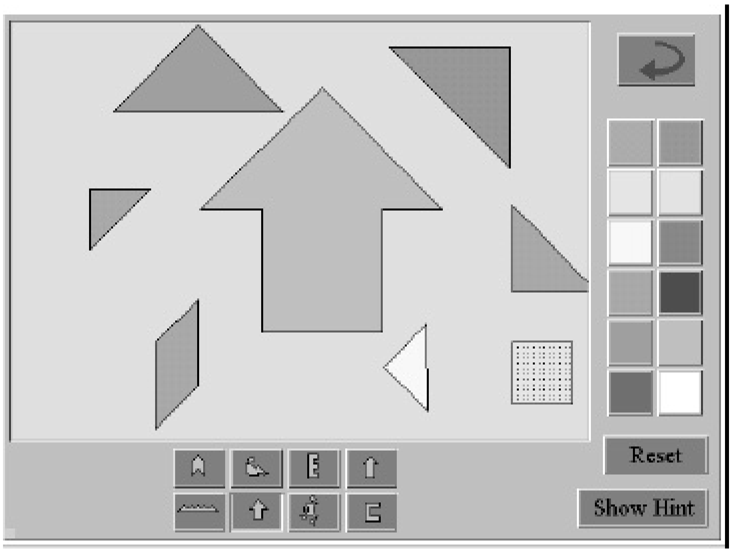
Esta actividad se puede hacer casi con cualquier material que permita dibujar o construir formas fácilmente. Listar propiedades o relaciones y hacer que los alumnos construyan tantas formas como sea posible que tengan esas propiedades o muestren esas relaciones. Comparar las formas hechas por los diferentes grupos. Estos son algunos ejemplos:
- Hacer una figura de cuatro lados con dos lados paralelos de la misma longitud pero no paralelos.
- Hacer varias figuras de seis lados. Hacer alguna con uno, dos y tres pares de lados paralelos y alguna sin ningún lado paralelo.
- Hacer figuras que tengan esquinas rectangulares. ¿Se puede lograr que tengan tres lados? ¿Y con cuatro, cinco, seis, siete u ocho lados?
- Hacer cinco triángulos diferentes. ¿En qué se diferencia? (Igual para figuras con cuatro, cinco y seis lados)
- Hacer triángulos con dos lados iguales (congruentes)
- Hacer figuras de cuatro lados con tres lados congruentes
- Intentar hacer figuras de cinco lados con cuatro lados que sean iguales
- Hacer cuadriláteros que tengan todos los lados iguales (o con dos pares de lados iguales)
- Hacer una figura con uno o más ejes de simetría, o con simetría rotacional.

A estos desafíos de propiedades se pueden incorporar también otras nociones como perpendicular, medidas de ángulos, área, perímetro, semejanza, concavidad y convexidad, simetría, etc. También se puede pedir que los propios alumnos se planteen otros problemas del mismo tipo que pongan en juego otras propiedades.

3.2.2. Actividades con el Tangram

La descripción de las figuras geométricas planas y la visualización de su aspecto cuando se les aplican transformaciones, como pueden ser rotaciones o simetrías, o bien se componen unas con otras, son aspectos importantes del aprendizaje de la geometría en los primeros niveles educativos. En esta sección describimos el uso de un material didáctico que se conoce como *tangram* que sirve de soporte material (o virtual) para el diseño de experiencias de enseñanza de gran interés. Se trata de un conjunto de siete piezas (un rompecabezas) que permite plantear una gran variedad de problemas y experiencias geométricas. Usaremos el ejemplo electrónico elaborado por el NCTM como parte del documento "Principios y Estándares 2000 para las matemáticas escolares" donde nos ofrecen la posibilidad de trabajar con un "tangram virtual".

En una primera parte los estudiantes pueden elegir una figura y usar las siete piezas para rellenar el contorno. En la segunda parte, "desafíos con el tangram", se propone que los estudiantes usen las piezas del tangram para formar polígonos dados.



Actividad 8
Elige una figura y usa las siete piezas para rellenar el contorno.

Observaciones:

Las experiencias previas de los alumnos con puzzles proporciona una base para realizar esta actividad. Ya que hay puzzles similares disponibles hechos de plástico o de cartulina, los alumnos pueden pasar de las experiencias con material concreto al entorno del ordenador. Después que los alumnos han tenido tiempo de trabajar con los contornos, el profesor puede plantear cuestiones como las siguientes, para provocar la reflexión sobre soluciones diferentes, o para que reflexionen sobre las estrategias que usan para resolver las tareas.

- ¿Puedes rellenar el contorno de otra manera?

- ¿Cuántas formas diferentes hay de rellenar esta figura?
- ¿Qué haces cuando no puedes imaginar una solución?
- Se pueden sustituir algunas piezas del tangram por otras?

¿Qué aprende los alumnos?

Aunque completar estos puzzles u otros similares, bien con material manipulativo o con el ordenador, puede ayudar a los estudiantes a generalizar sus experiencias, el entorno del ordenador es probable que les estimule a pensar sobre cómo necesitan manipular las piezas en lugar de hacerlo principalmente por ensayo y error. El trabajo con un compañero en el ordenador también estimula a los estudiantes a ser más precisos en el uso del vocabulario sobre el espacio. El maestro puede enriquecer el vocabulario de los estudiantes en sus conversaciones con otros estudiantes comentando las acciones que realizan, diciendo por ejemplo, "Veo que estás girando el paralelogramo", o bien "¿Qué diferencia produciría si se volteara la pieza?

Ejercicio 4:

a) ¿Cómo pueden los profesores proporcionar tiempo para que todos los alumnos interactúen con los tangram virtuales?
b) ¿Qué tipo de discusiones sobre el trabajo de los alumnos con las piezas del tangram puede planificar el maestro que pudieran enriquecer la comprensión de los estudiantes sobre las formas y el movimiento en el espacio?

Desafíos con el tangram

Actividad 9:

a) ¿Es posible completar todas las tareas que se describen a continuación? Intenta resolver estos desafíos con el tangram virtual:
- Construye un cuadrado usando sólo una pieza del tangram
- Ídem usando dos, tres, cuatro, cinco, seis y las siete piezas del tangram.

b) ¿Cuáles de las siguientes figuras puedes hacer usando las siete piezas del trangram?

- Un trapezoide
- Un rectángulo que no sea un cuadrado
- Un paralelogramo que no sea un cuadrado
- Un triángulo

El trabajo en la clase

Muchos estudiantes encontrarán estas tareas muy interesantes pero difíciles. Los alumnos están aprendiendo sobre las posiciones de las figuras en el espacio, así como nuevo vocabulario y las propiedades de las figuras. El tangram virtual puede ayudar a que los estudiantes sean más conscientes de las propiedades de las figuras y de los procesos que usan al manipular las formas ya que deben planificar los movimientos que necesitan realizar. Los profesores pueden animar a los estudiantes a planificar sus acciones si tienen que trabajar con un compañero y hablar entre ellos de las acciones que tienen que realizar. Por ejemplo, los estudiantes tienen que imaginar explícitamente cómo colocar las piezas del tangram, unas respecto de otras, en las actividades en las que no hay un contorno que rellenar. Las herramientas incorporadas en el tangram virtual que permiten realizar giros y simetrías son también un buen recurso para que los estudiantes vean los movimientos geométricos.

Estos desafíos con el tangram se pueden hacer más fáciles dando contornos a los alumnos para que los usen en sus pupitres, de manera que puedan experimentar con el ajuste de las siete piezas del tangram en los contornos propuestos.

Evaluación mediante observaciones y conversaciones

Las actividades descritas con el tangram pueden servir como vehículos para evaluar el pensamiento de los estudiantes. Al observar y hablar con los estudiantes, el profesor puede tener en cuenta cuestiones como las siguientes:
- ¿Tienen facilidad los estudiantes para manipular las formas?
- ¿Qué vocabulario usan los estudiantes cuando hablan unos con otros?
- ¿Reconocen los estudiantes la congruencia y las relaciones entre combinaciones de formas?
- ¿Utilizan los estudiantes lo que han aprendido en tareas previas de resolución de problemas?

Ejercicio 5

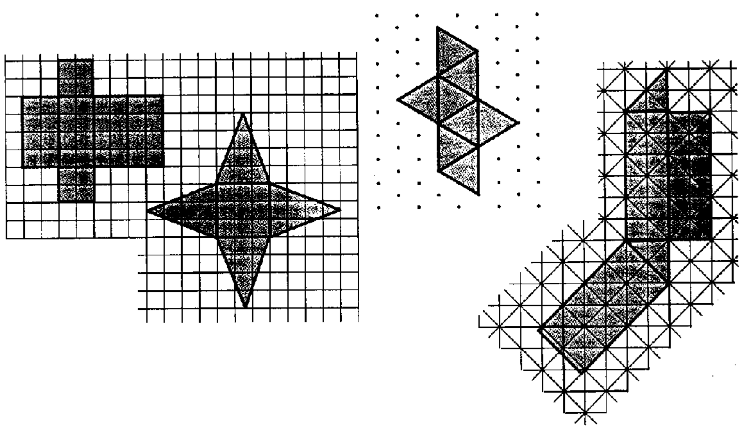
a) ¿Cómo podría facilitar el aprendizaje de los niños con necesidades especiales el trabajo con manipulativos basados en el ordenador?
b)¿Qué actividades adicionales podrían diseñar los profesores para centrar la atención de los estudiantes en las relaciones entre las piezas del tangram?

3.4. Construcción y exploración de sólidos

La construcción de formas tridimensionales presenta un poco de más dificultad que las formas bidimensionales pero posiblemente sea una actividad más importante. Construir un modelo de una forma tridimensional es una manera informal de lograr la comprensión de la forma de una manera intuitiva en términos de sus partes componentes.

Actividad 10: Desarrollo de sólidos (nivel 0)

Hacer que los alumnos dibujen desarrollos de diversos sólidos. Sobre papel cuadriculado con una retícula de 1cm de lado se pueden trazar líneas paralelas y ángulos sin tener que hacer mediciones. Conos circulares se pueden hacer fácilmente recortando un sector de un círculo. Experimentar con círculos de tamaños diferentes y diferentes sectores. El valor principal de la construcción de sólidos a partir de sus desarrollos está en la identificaicón de la forma de las caras y dónde se deben conectar las caras.



Los sólidos se pueden también construir usando otras piezas más simples como pueden ser cubos de madera o de plástico.

Actividad 11: Cajas de bloques

¿Cuántos sólidos rectangulares (ortoedros) diferentes se pueden construir usando 12 cubos para cada uno de ellos? (Un sólido rectangular tiene seis caras, y cada cara es un rectángulo). Probar con otro número de cubos. ¿Cuándo son congruentes (exactamente los mismos) dos sólidos rectangulares? ¿Cómo tendrías que girar un sólido para ponerlo en la misma orientación que otro que tiene la misma forma?

Actividad 12: Generación de sólidos (nivel 1)

1. Dar a los alumnos una figura recortada en cartulina. La tarea consiste en describir, dibujar o construir con plastilina (u otro material) todos los sólidos que se puedan generar a partir de esa forma. La figura se puede girar o trasladar de cualquier manera. ¿Se pueden generar algunas figuras de más de una manera?

2. Dar a los alumnos un modelo de un sólido, o describirlo oralmente. Los alumnos tienen que dibujar y recortar una o más formas que generen dicho sólido y describir como se haría la generación.

¿Qué sólidos no se pueden generar de esta manera? ¿Qué se puede decir sobre un sólido que se ha generado mediante deslizamientos? ¿Cómo se pueden generar los cilindros? ¿Y los primas? ¿Qué tipos de conos se pueden generar y cómo?

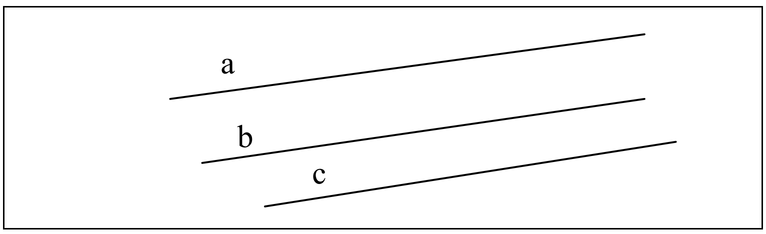
3.5. Geometría dinámica (Logo y Cabrí)

Si se dispone en la escuela de un aula con ordenadores es posible utilizar programas comerciales disponibles para el estudio de la geometría. Entre estos programas podemos citar el Cabri y el módulo de la "geometría de la tortuga" del lenguaje de programación Logo (Godino y Batanero, 1985).

4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Incluimos en esta sección una colección de items usados en diversas investigaciones para evaluar los conocimientos geométricos de los niños, indicando algunas de las respuestas erróneas encontradas, o los índices de dificultades.

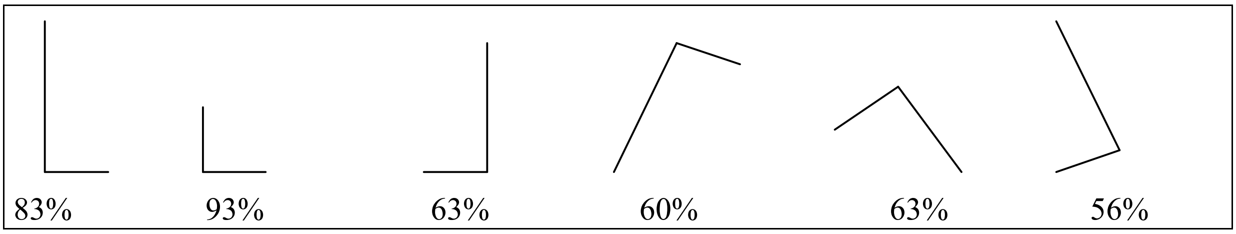
1. La recta *a* es paralela a *b*, y la *b* es paralela a *c*. ¿Es cierto que *a* será paralela a *c*?



Respuesta:

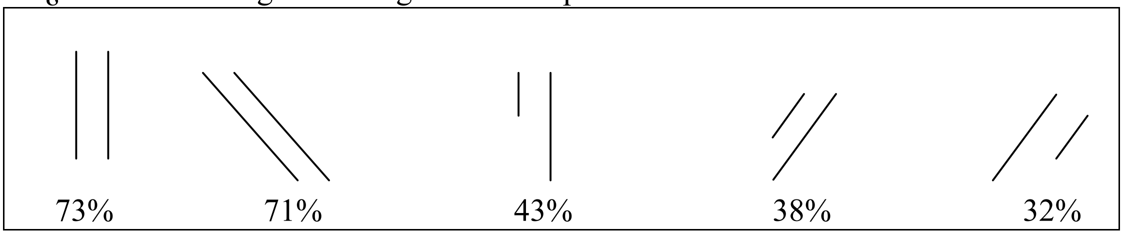
"No, porque b está en medio"

2. ¿Cuáles de las siguientes figuras son ángulos rectos?



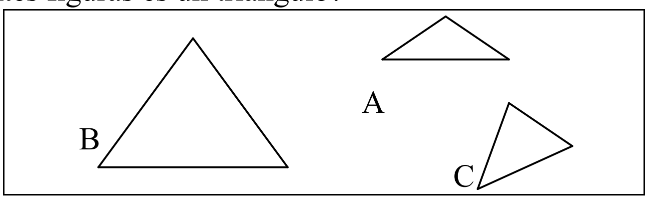
Respuestas[1] :
Los porcentajes indicados corresponden a las respuestas dadas por niños de 10 años afirmando que tales figuras son ángulos rectos. Vemos cómo cambian los porcentajes de éxito según la orientación de la figura y el tamaño de los segmentos trazados como lados.

3. ¿Cuáles de los siguientes segmentos son paralelos?



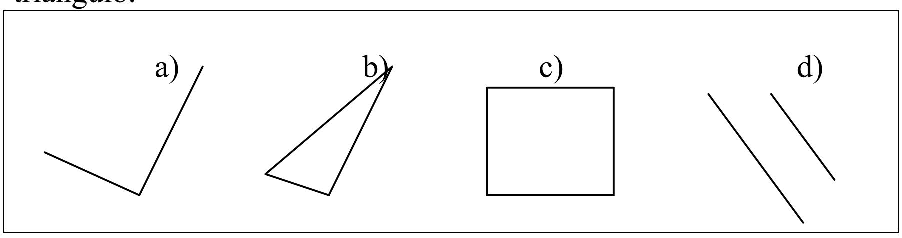
Respuestas[1]:
Los porcentajes indicados corresponden a las respuestas dadas por niños de 10 años afirmando que tales rectas son paralelas. Vemos cómo cambian los porcentajes de éxito según la orientación de la figura y el tamaño de los segmentos trazados.

4. ¿Cuál de las siguientes figuras es un triángulo?



Respuesta:
"C no es un triángulo, porque se ha caido"

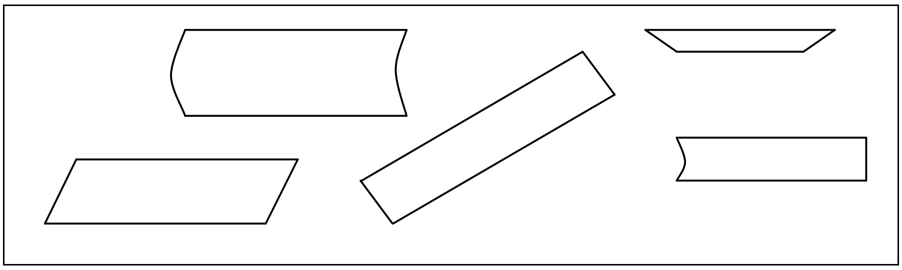
5. Señala entre las siguientes figuras, 1) La que sean un cuadrado; 2) La que sean un triángulo.



Repuestas[4] :

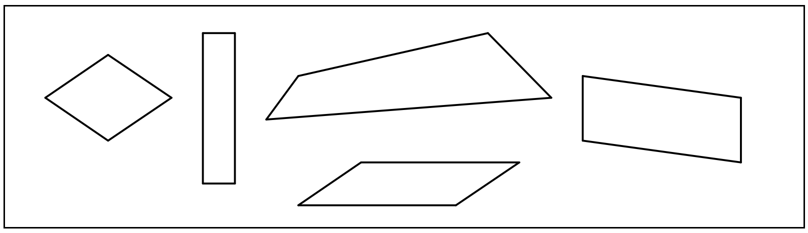
Edad	Porcentaje que reconoció que c) es un cuadrado
5 años 6 “ 7 “	54 56 50
	Porcentaje que reconoción que b) es un triángulo
5 años 6 “ 7 “ 8 “ 9 “ 10 “	38 47 24 65 50 67

6. Marca con una X debajo de aquellas figuras que creas que son rectángulos



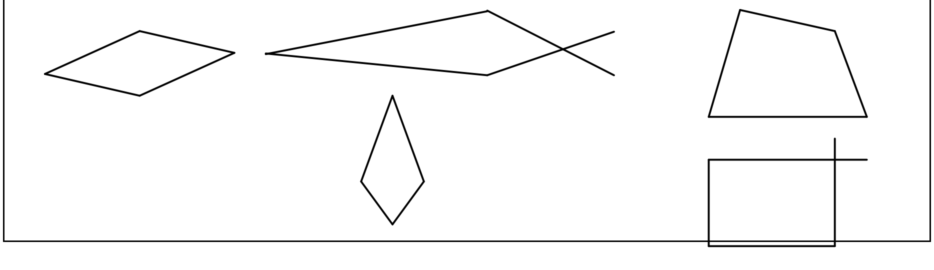
Respuestas[5]:
En una muestra de 423 alumnos de 6º curso el 53% dieron una respuesta errónea a este ítem.

7. Marca con una X debajo de aquellas figuras que creas que son rectángulos



Respuestas[5]:
Porcentaje de respuestas incorrectas del 55%.

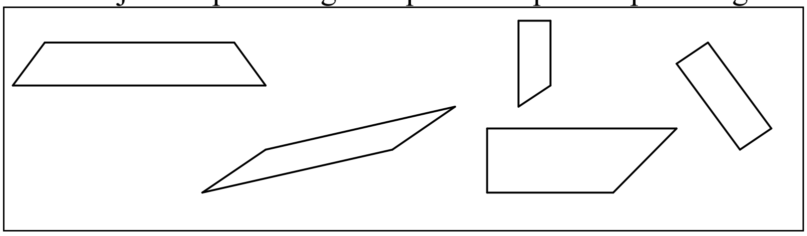
8. Marca con una X debajo de aquellas figuras que creas que son rombos



[4] Dickson, Brown y Gibson (1991), p. 40.
[5] Contreras (1994)

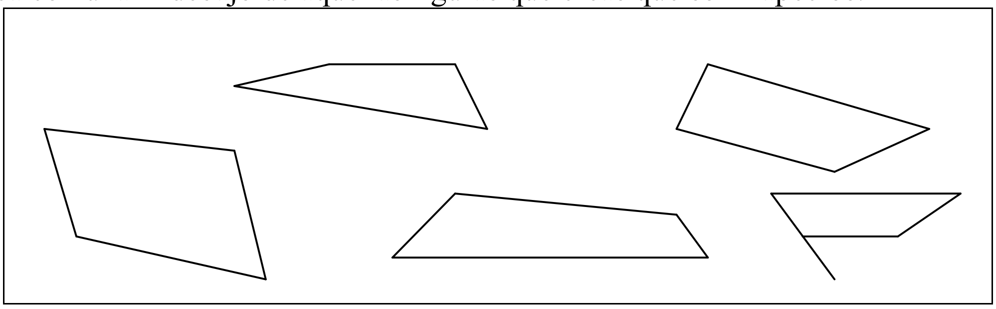
Respuestas[5]:
Porcentanje de respuestas incorrectas del 44%.

9. Marca con una X debajo de aquellas figuras que creas que son paralelogramos:



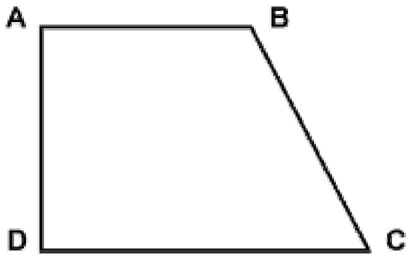
Repuestas[5]:
Porcentaje de respuestas incorrectas del 80%.

10. Marca con una X debajo de aquellas figuras que creas que son trapecios:



Respuestas[5]:
Porcentaje de respuestas incorrectas del 86%.

11.
En el trapecio ABCD dos de sus ángulos son rectos y un tercer ángulo mide 54°. ¿Cuánto mide el ángulo desconocido?



36° A
27° B
45° C
126° D*

Esta pregunta tuvo un 46% de aciertos en la evaluación de la Educación Primaria realizada en 1995 por el INCE (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación) a alumnos de 12 años. (http://www.ince.mec.es/prim/index.htm).

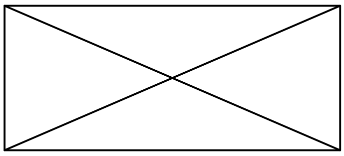
12. Visualizar cómo será una figura en tres dimensiones girada ha resultado sencillo. El 68% de alumnos de 13 años (en la evaluación TIMSS, España[6]) respondieron correctamente a la siguiente pregunta:

[6] http://www.ince.mec.es/pub/pubintn.htm#ref01

5. TALLER DE DIDÁCTICA: ANÁLISIS DE SITUACIONES ESCOLARES

5.1. Respuestas de estudiantes a pruebas de evaluación [7]

Un maestro propone a sus alumnos las dos preguntas siguientes en una prueba de evaluación.
Pregunta 1:
Escribe una descripción que permita a cualquier persona reproducir exactamente esta figura sin haberla visto antes:



Pregunta 2:
Imagina que has faltado a la última clase de matemáticas. Tu compañera Carolina te describe por teléfono una figura geométrica: "Traza con lápiz un círculo de 4 cm de radio. Dibuja con lápiz 2 diámetros perpendiculares. Los extremos de estos diámetros son 4 puntos del círculo. Traza con tinta los segmentos que unen los puntos y que no pasan por el centro del círculo".

a) Dibuja la figura; b) ¿Cómo se llama la figura trazada con tinta?

Cuestiones para el futuro maestro:
Pregunta 1:
1. Responde a la pregunta
2. ¿Cómo pueden interpretar los alumnos la palabra "exactamente" utilizada en la pregunta?
3. El maestro espera que los alumnos utilicen en sus descripciones al menos dos términos del vocabulario geométrico. ¿Cuáles son esos términos según tu opinión?
4. ¿Sobre qué puntos se centrará vuestra evaluación de la respuesta de un alumno que no utilice ninguno de estos términos?
5. Caracterizar las competencias requeridas para realizar correctamente este test.

Pregunta 2:
1. Responde a la pregunta
2. ¿Cuáles son los elementos de apreciación del maestro para la parte a) ¿Qué piensas si el maestro utiliza un calco para la corrección?
3. Para la parte b) se puede prever que algunos alumnos respondan "rombo". ¿Por qué? ¿Cómo reaccionarías a estas respuestas?
4. Comparar las competencias requeridas para realizar correctamente este pregunta con las de la pregunta 1.

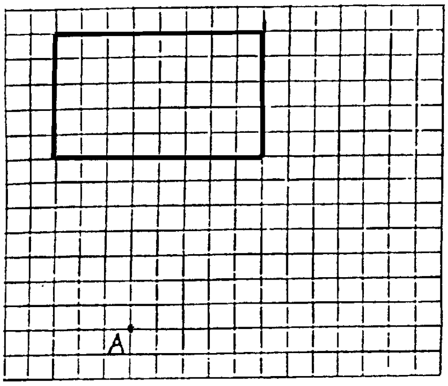
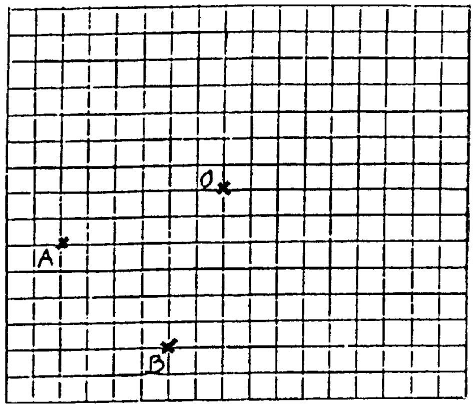
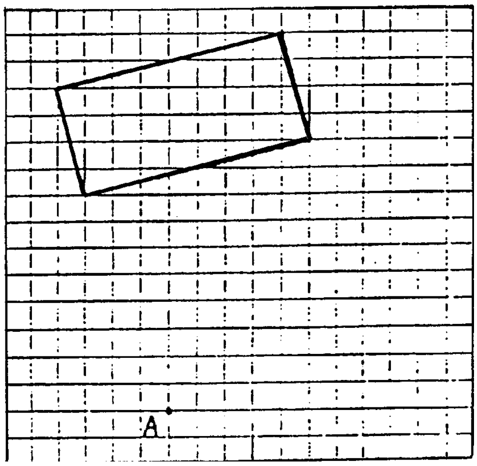
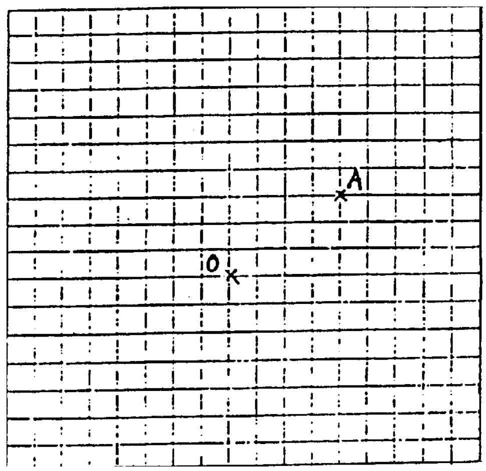
5.2. Análisis de actividades escolares [7]

5.2.1. Construcción de un rectángulo
Un maestro propone a sus alumnos de 6º curso la actividad descrita en el documento adjunto, en la que se pide dibujar distintos rectángulos.

1. Para cada uno de los seis ejercicios, describir un procedimiento de resolución en el cual un alumno podría pensar. Indicar para cada procedimiento las ideas geométricas sobre las cuales se apoya y los instrumentos utilizados.

[7] Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.

2. ¿Cuáles son las variables didácticas que intervienen en los diferentes ejercicios? ¿En qué sentido orientan la actividad de los alumnos?
3. El maestro considera este documento como un instrumento de evaluación. ¿Cómo puede explotar esta prueba si no es considerada como una evaluación final (de tipo sumativo)?

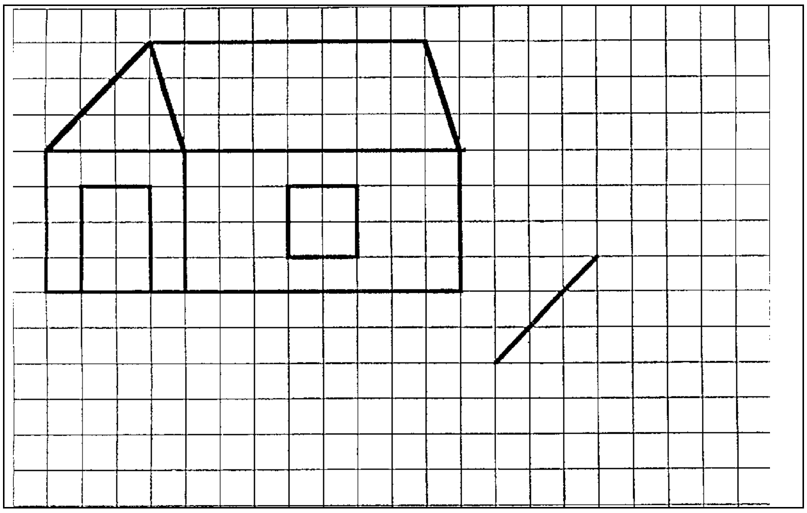
1) Reproduce el rectánculo colocando un vértice en A 	4) Termina de dibujar un rectánculo ABCD con centro en O 
2) Reproduce el rectánculo colocando un vértice en A 	5) Construye un rectángulo de vértice A y centro O 
3) Construye un rectángulo con vértice en A A X	6) Construye un rectángulo de centro O O X

5.2.2. *Construcciones geométricas*

El ejercicio adjunto tiene por consigna: "Reproduce la casa; ya se ha comenzado a dibujar un trazo". Responde a las siguientes cuestiones:

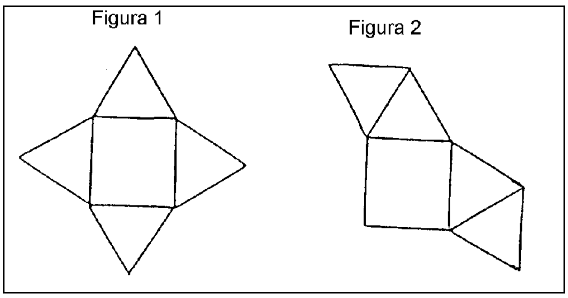
1. ¿En qué ciclo de la primaria situarías este ejercicio? Justifica la respuesta.

2. ¿Cuáles son los conocimientos y destrezas necesarias para realizar con éxito este ejercicio?
3. Si tuvieras que utilizar este ejercicio con tus alumnos,
   a) ¿Qué medios de control pondrías al alcance de los niños?
   b) ¿Qué clase de ayuda darías a los niños con dificultades?
   c) ¿Cómo utilizarías las producciones de los niños, o sea, qué destacarías en el momento de la síntesis de la secuencia?
4. ¿Qué ampliaciones podrías proponer a este ejercicio?
5. La casa se dibuja sobre papel blanco (no cuadriculado). La consigna del ejercicio es: "Reproduce la casa con la ayuda de un compás, una regla no graduada y una escuadra".
   a) Realiza el ejercicio. Indicar las principales etapas de su construcción.
   b) ¿Qué conocimientos y destrezas son necesarias para poder realizar este ejercicio?
   c) ¿En qué ciclo de la escuela situarías este ejercicio? Justifica la respuesta.



5.2.3. *Multiplicidad de patrones de un sólido*

Para lograr que los niños tomen conciencia de la multiplicidad de patrones (desarrollos) que pueden permitir la construcción de un sólido se les puede proponer el siguiente problema: Se elige como sólido la pirámide regular de base cuadrada, es decir formada por un cuadrado y cuatro triángulos equiláteros, y se pide realizar el mayor número posible de patrones. A título de ejemplo, las figuras 1 y 2 representan dos patrones de dicha pirámide:



1. Representar mediante un esquema a mano alzada otros tres patrones de la pirámide de base cuadrada.
2. Describir cómo organizar esta situación de investigación en una clase de primaria. Sugerimos tener en cuenta la siguiente secuencia:
   a) Presentar el desarrollo general, indicando las diferentes fases y sus características.

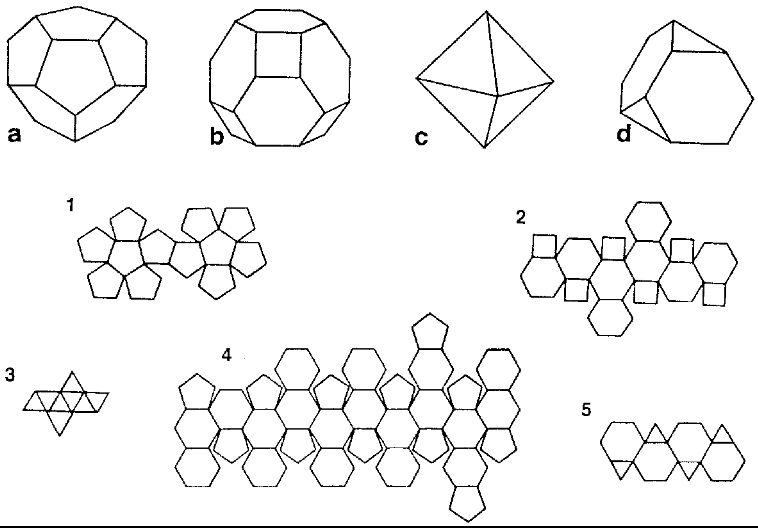
   b) Para cada fase indicar la organización de la clase, el material puesto a disposición de los alumnos (en particular el que permita dibujar rápidamente las figuras) así como las consignas dadas.
   c) Explicitar los conocimientos utilizados en esta actividad que deberán ser objeto de institucionalización.
3. Explica si consideras que la actividad desarrollada reune las características de una "situación-problema".

5.2.4. *Caracterización de un patrón*

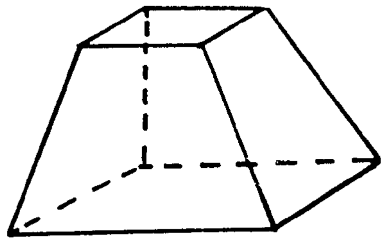
1. Analizar el ejercicio propuesto en el documento 1 adjunto.
   a) Explicar apoyándote en ejemplos por qué se puede resolver el ejercicio sin tener una comprensión de lo que es un patrón.
   b) Tratar de comprender las estrategias que podría utilizar a priori un niño para responder a esta cuestión.
2. Analizar el ejercicio propuesto en el documento nº 2
   a) ¿Cuáles son los dibujos que no son patrones?
   b) ¿Qué consignas suplementarias se pueden proponer para verificar que los niños son capaces de poder justificar la obtención, o no, de la caja, a partir de las figuras propuestas, sin hacer el recorte de la figura.
3. Balance comparativo de los objetivos de los dos ejercicios.
   Para cada uno de los dos ejercicios, entre las propiedades de un sólido que permiten caracterizarlo, indicar:
   a) aquellas que basta identificar para responder a la consigna,
   b) la que es imposible confrontar para las dos representaciones dadas (perspectiva y patrón).
   c) aquellas propiedades que, aunque aparezcan en las dos representaciones, no son utilizadas en la resolución del ejercicio.

DOCUMENTO 1

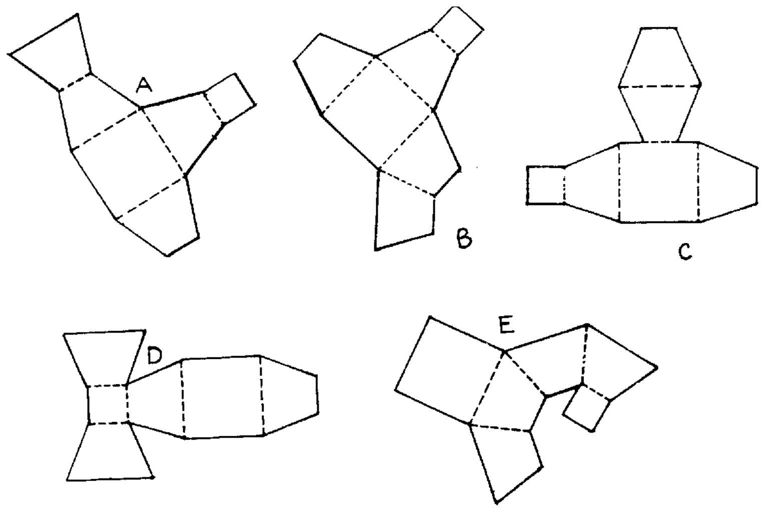
Se han representado 4 poliedros y 5 patrones de poliedros. Relacionar mediante una flecha cada poliedro con el patrón correspondiente.



DOCUMENTO 2
Se quiere construir una caja como la que se representa a continuación:



Aquí debajo se muestran figuras recortables algunas de las cuales permiten construir la caja propuesta. Señala las que efectivamente permiten hacer la construcción.

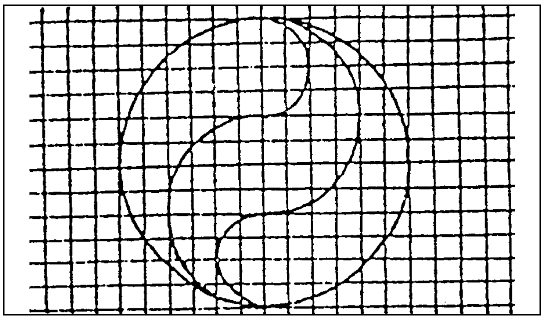


5.3. Análisis de materiales didácticos

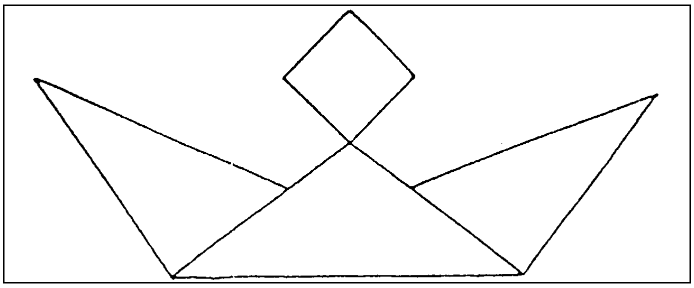
La cuadrícula como instrumento geométrico[8]

1. El papel cuadriculado se considera como un "instrumento" en geometría. ¿Por qué? ¿Cuáles son los restantes instrumentos en el estudio de la geometría?
2. ¿En qué se diferencia la geometría sobre 'papel blanco' respecto de la geometría en papel cuadriculado?
3. Estos son dos ejercicios de un libro de primaria:
   a) Observa esta figura y reprodúcela sobre papel cuadriculado:

[8] Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.



b) Oserva esta figura y reprodúcela sobre papel blanco:



¿Qué competencias (conocimientos y destrezas) debe poseer el niño para resolver cada uno de estos dos ejercicios?
¿Por qué se ha utilizado papel blanco o cuadriculado en cada caso?

5.4. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

- Estudia el desarrollo del tema de "Figuras geométricas" en dichos niveles.
- Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
- Busca algún tipo de problema o tarea que consideres no está representado en la muestra de problemas que hemos seleccionado como actividad introductoria del estudio de este tema.
- Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
- Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos de primaria.

Bibliografía

Alsina, C., Burgués y Fortuny, J. M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C., Burgués y Fortuny, J. M. (1987). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.

Cañizares, M. J. (2001) Elementos geométricos y formas espaciales. En, Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 401-426). Madrid: Síntesis

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Ed. Labor.
Godino, J. D. y Batanero, C. (1985). *Microordenadores en la escuela*. Madrid: Rama.
Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Madrid: Síntesis.
Long, C. T. y DeTemple, D. W. (1996). *Mathematical reasoning for elementary teachers*. New York: Harper Collins.
Martínez, A. M. y Juan, F. R. (Coord.) (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis.
Serrano, L. (2001). Elementos geométricos y formas planas. En, Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 379-400). Madrid: Síntesis
Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (4ª edición). New York: Longman.

Geometría y su Didáctica para Maestros

Capítulo 2:

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS. SIMETRÍA Y SEMEJANZA

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN PRIMARIA

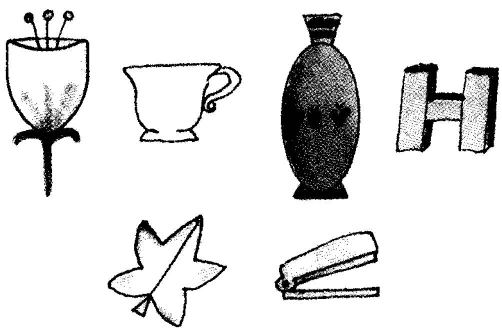
Consigna:

Los enunciados que se incluyen a continuación han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos,

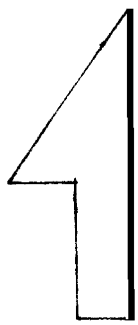
1. Resuelve los problemas propuestos.
2. Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3. Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
4. Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5. ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

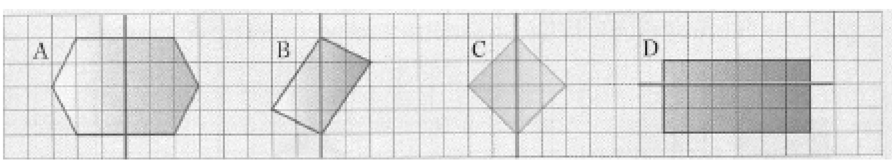
1. ¿Cuáles de estas figuras tienen eje de simetría?



2. Calca esta figura, dobla por la línea gruesa y recorta. ¿Qué se obtiene?



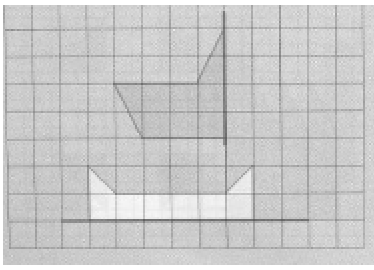
3. ¿En qué poligonos de la figura la línea de trazos no es un eje de simetría? (4º Curso)

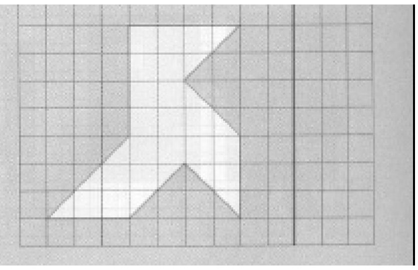


4. Dibuja un triángulo y un cuadrilátero que no tengan eje de simetría.

5. Dibuja la otra mitad de estas figuras para que sean simétricas

6. Dibuja la figura simétrica respecto del eje de simetría señalado

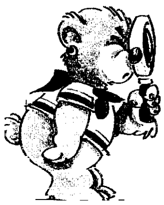


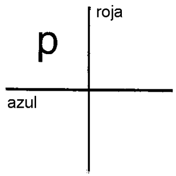


7.

LETRAS SIMÉTRICAS

Observa el dibujo y contesta.





- ¿Qué letra es la simétrica de la letra **p** respecto de la recta roja?
- ¿Qué letra es la simétrica de la letra **p** respecto de la recta azul?
- ¿Qué letra es la simétrica de la letra **q** respecto de la recta roja?

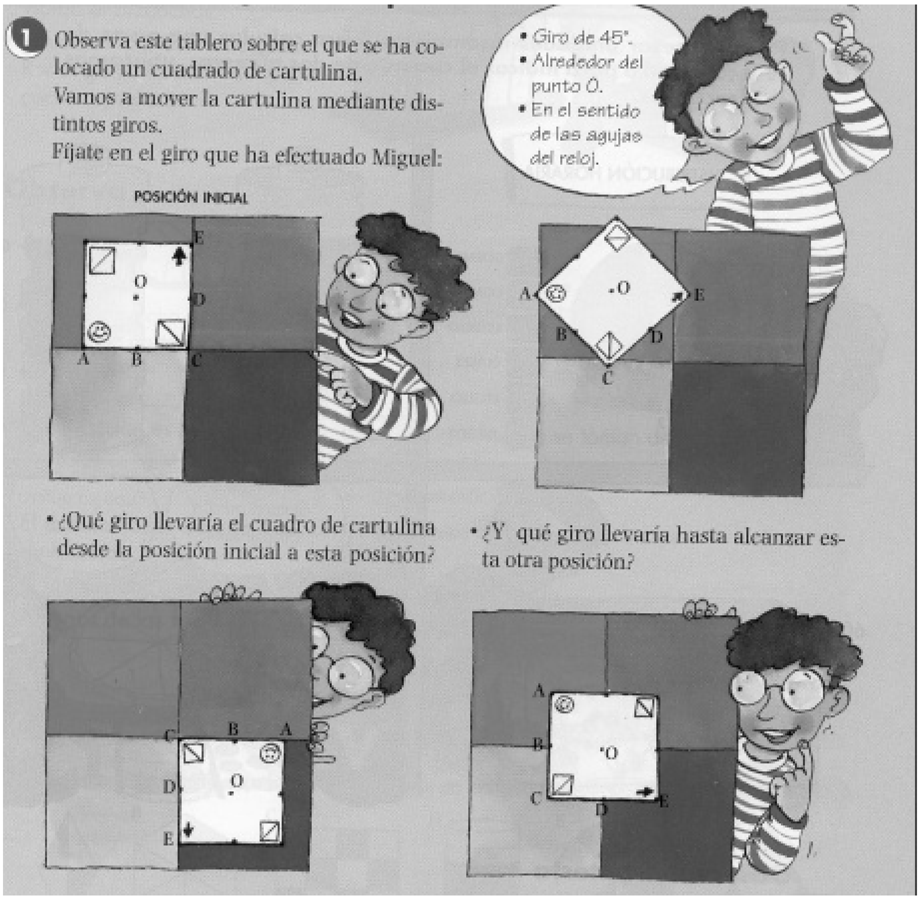
8.

Escribe las siguientes letras y traza en cada una de ellas un eje de simetría.

A B V T E M

Escribe otras cuatro letras que tengan algún eje de simetría.

9.



Dibuja el tablero y la posición del cuadro de cartulina tras los siguientes movimientos:

a) Giro de 90º alrededor del punto A en sentido de las agujas del reloj.
b) Giro de 45º alrededor del punto E en sentido contrario a las agujas del reloj.
c) Giro de 90º alrededor del punto D en sentido contrario a las agujas del reloj.

B: Conocimientos Matemáticos

1. MOVIMIENTOS RÍGIDOS: TRASLACIONES, GIROS, SIMETRÍAS, COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

Imaginemos que cada punto P del plano se "mueve" hasta una nueva posición P' sobre el mismo plano. P' es la imagen de P y éste el original o preimagen de P'. Si a puntos P y Q distintos les corresponden imágenes P' y Q' distintas, y todo punto tiene una única preimagen decimos que la correspondencia establecida entre los puntos del plano es una transformación del plano.

Movimientos rígidos del plano

Una transformación del plano se dice que es un movimiento rígido si y sólo si la distancia entre cualquier par de puntos P y Q es la misma que la distancia entre sus imágenes en dicha transformación, esto es, PQ = P'Q', para todo par de puntos P y Q.

Los movimientos rígidos también se llaman *isometrías* debido a que conservan la forma y medidas de las figuras. Un modelo físico que permite materializar los movimientos rígidos del plano se puede hacer mediante una hoja de transparencias. Si tenemos cualquier figura sobre una hoja y hacemos una transparencia de dicha figura, el original y la transparencia son congruentes. La transparencia la podemos mover en una dirección, girar sobre un punto fijo, o darle la vuelta alrededor de una recta fija. En todos estos casos se obtiene una nueva figura colocada en una posición diferente, pero la forma y dimensiones de la figura original no cambian.

Hay tres movimientos rígidos del plano básicos: traslaciones, giros y simetrías.

1.1. Traslaciones

Una traslación es el movimiento rígido en el que todos los puntos del plano se mueven en la misma dirección y la misma distancia. En la figura 1 el triángulo ABC se transforma en el A’B’C’ como consecuencia de la traslación definida por el vector de origen el punto A y extremo A’. Una traslación queda determinada dando un vector que especifique la dirección en la que se trasladan todos los puntos del plano y la distancia a la cual se trasladan, que es el módulo del vector (distancia entre el origen y el extremo)

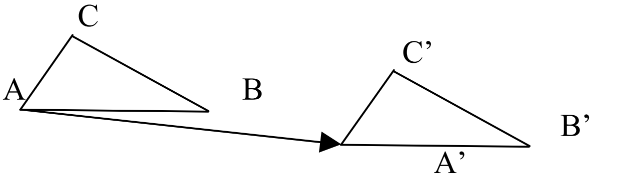


Fig. 1

1.2. Giros

El *giro* o *rotación* es otro de los movimientos rígidos básicos. Consiste en girar todos los puntos del plano alrededor de un punto fijo (*centro del giro*) un cierto ángulo que será el *ángulo de giro*. En la figura 2 hemos representado sobre una supuesta hoja de papel el triángulo ABC, el segmento PQ y el dibujo de una mano (EGF) . Al aplicar un giro a dicha hoja alrededor del punto fijo O y de amplitud 120º en el sentido contrario a las agujas del reloj se obtienen como imagenes transformadas las figuras

A’B’C’, P’Q’, y la mano E’G’F’. Esta transformación se puede ejemplificar usando una hoja de transparencias para materializar las imágenes obtenidas al girar la hoja manteniendo fijo el punto O.

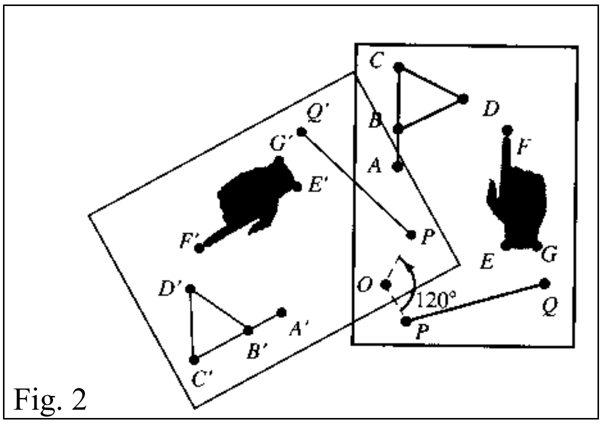


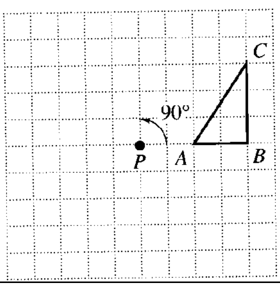
Fig. 2

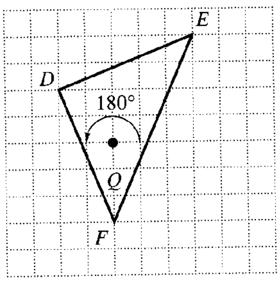
Un giro queda determinado al dar el centro O y la amplitud α del ángulo orientado correspondiente. Se considera que el giro es positivo si se produce en sentido contrario a las agujas del reloj y negativo cuando se hace en el sentido de las agujas del reloj. En un giro sólo se tienen en cuenta las posiciones iniciales y finales de los puntos.

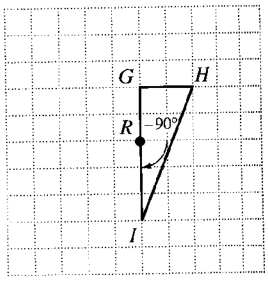
Ejercicio:

1. Encontrar la imagen de cada figura al aplicarle el giro indicado:

a) Giro de 90º alrededor de P b) Giro de 180º sobre Q c) Giro de –90º sobre R







1.3. Simetrías

La *simetría* o *reflexión* sobre un espejo es el movimiento rígido del plano que se produce fijando una recta *r* del plano y hallando para cada punto P otro punto P’ de tal manera que la recta *r* es mediatriz del segmento PP’. Esto quiere decir que *r* es perpendicular a PP’ y que pasa por el punto medio del segmento PP’.

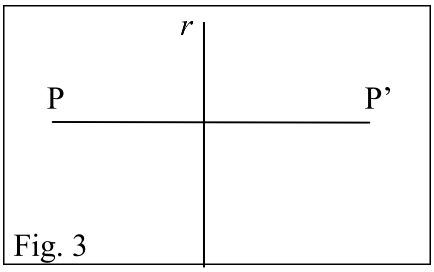
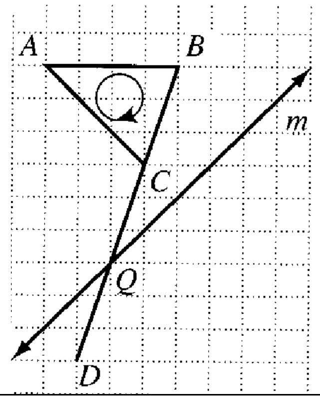


Fig. 3

Se puede observar que una simetría invierte la orientación de las figuras: los puntos que están a la derecha del eje de simetría pasan a estar a la izquierda después de la transformación, y los que están a la izquierda pasan a la derecha.

Ejercicio:

2. Trazar la figura simétrica de la "bandera" respecto de la recta *m*:



1.4. Composición de isometrías: la simetría con deslizamiento

Cualquier par de los movimientos considerados hasta ahora, traslaciones, giros y simetrías se pueden aplicar sucesivamente, esto es, primero se aplica uno y a la figura transformada se le aplica el segundo movimiento. La transformación que única que permite pasar de la primera figura a la última se dice que es la composición de los movimientos dados. Se llama *simetría con deslizamiento* a la composición de una simetría y una traslación.

Ejercicio:

3. Comprobar y demostrar las siguientes proposiciones:
a) El resultado neto de dos simetrías sucesivas es una traslación si las ejes de simetría son paralelos, o un giro, si los ejes se cortan.

b) El resultado neto de la aplicación de tres simetrías de ejes e_1, e_2 y e_3 es equivalente a:
- una simetría, si e_1, e_2 y e_3 son paralelos o concurrentes, o bien,
- una simetría con deslizamiento, si e_1, e_2 y e_3 no son paralelos ni concurrentes.

c) Cualquier movimiento rígido del plano es equivalente a uno de los cuatro movimientos rígidos básicos: una traslación, un giro, una simetría o una simetría con deslizamiento.

Los movimientos rígidos tienen muchas aplicaciones en geometría. Por ejemplo, la definición informal de congruencia, "tener la misma forma y tamaño" se puede precisar del siguiente modo:

Definición: Figuras congruentes

Dos figuras son congruentes si y sólo sí, una figura es la imagen de la otra mediante un movimiento rígido.

2. PATRONES Y SIMETRÍAS

La simetría es un principio universal de organización y de la forma. El arco de circunferencia formado por el arco iris y las simetrías exagonales de los cristales de hielo son expresiones visibles de la simetría de muchos procesos físicos del universo. La simetría es una especie de norma en la naturaleza y no una excepción. Todas las culturas humanas, hasta las más primitivas han desarrollado una comprensión intuitiva de los conceptos básicos de la simetría. Las decoraciones encontradas en las cerámicas, paredes de templos, armas, instrumentos musicales, etc. Incorporan, con mucha frecuencia, elementos simétricos. Incluso la música, la poesía y la danza incorporan frecuentemente la simetría en su estructura interna.

Simetría de una figura plana

Una simetría de una figura plana es cualquier movimiento rígido del plano que hace coincidir todos los puntos de la figura con otros puntos de la misma figura. Esto es, todos los puntos P de la figura son transformados por el movimiento en otros puntos P' que son también puntos de la figura. El movimiento identidad es una simetría de cualquier figura, pero en general interesa identificar otros movimientos de simetría que no sean la identidad. Como consecuencia de una simetría que no sea la identidad algunos puntos de la figura se mueven hacia otras nuevas posiciones en la propia figura, aunque la figura en su conjunto aparezca inalterada en el movimiento.

El teorema de clasificación que hemos enunciado nos dice que existen cuatro movimientos rígidos básicos del plano (traslaciones, giros, simetrías y simetrías con deslizamiento). Por tanto, toda simetría de una figura es uno de estos cuatro movimientos básicos, y las propiedades de simetría de una figura se pueden describir completamente listando las simetrías de cada tipo.

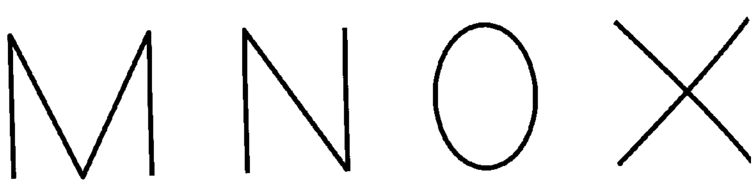
2.1. Simetría axial

Se dice que una figura tiene simetría por reflexión si hay una recta que pasa por la figura que es un eje de simetría de la figura, esto es, el movimiento de simetría sobre dicho eje hace coincidir la figura consigo misma de manera global.

Ejercicio:

4. ¿Cuántas líneas de simetría tienen las siguientes letras?:

(a) **(b)** **(c)** **(d)**

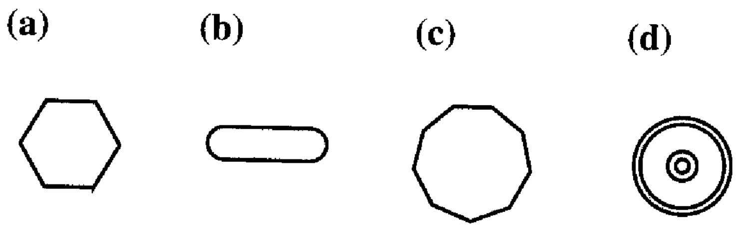


2.2. Simetría rotacional

Se dice que una figura tiene simetría rotacional si la figura coincide consigo misma cuando se gira un cierto ángulo entre 0º y 360º alrededor de un cierto punto. El centro de giro es el centro de rotación de la figura.

Ejercicio:

5. Determinar los ángulos de las simetrías rotacionales de estas figuras:



2.3. Simetría central

Una figura tiene simetría puntual si existe una simetría por rotación de 180º sobre algún punto O. Esto implica que al darle media vuelta a la figura coincide consigo misma de manera global, y cada punto P de la figura tiene un punto correspondiente P' de la figura que está en dirección opuesta en el giro de centro O.

Ejercicio:

6. ¿Qué letras, escritas en mayúscula, tienen simetría puntual?

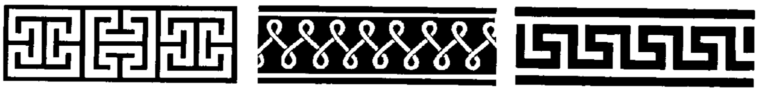
2.4. Cubrimientos regulares del plano. Frisos y mosaicos

Llamamos cubrimiento regular del plano al resultado de someter a una figura dada a repeticiones (isometrías planas) de forma que el plano quede recubierto de dichas figuras sin dejar huecos y sin que haya solapamientos. Si a una figura la sometemos a traslaciones en una sola dirección obtenemos los *frisos*, y si la sometemos a dos traslaciones de direcciones distintas se obtienen los *mosaicos*. Tanto los frisos como los mosaicos constituyen patrones geométricos, es decir, formas que se obtienen mediante una figura generadora (figura mínima) a la que se le aplica un grupo de transformaciones.

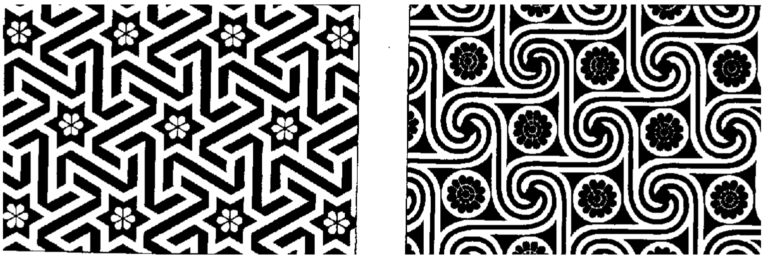
Los patrones geométricos son usados frecuentemente en motivos decorativos de paredes, alfombras, etc. Es necesario mostrar un fragmento de tamaño suficiente para mostrar el motivo que se repite indefinidamente.

Un patrón puede tener otras simetrías además de la simetría por traslación. Sin embargo, las posibilidades son limitadas. Por ejemplo, la única simetría rotacional de un friso es media vuelta. El hecho de que sólo ciertas simetrías pueden coexistir en un patrón hace posible clasificar los tipos de simetrías de los patrones. En particular, se ha demostrado que hay sólo siete tipos de frisos, y diecisiete tipos de mosaicos.

Frisos:



Mosaicos:

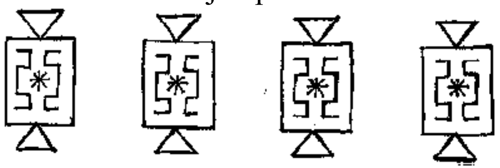


Clasificación de frisos y mosaicos

Existen diversas notaciones para nombrar los siete tipos de cenefas o frisos que existen. Una de ellas viene dada por un par de caracteres cuyo significado resumimos en la tabla siguiente:

Primera letra	**Segunda letra**
m = simetría vertical	m = simetría horizontal
1 = no simetría vertical	g = simetría con deslizamiento
	2 = simetría central
	1 = no simetría adicional

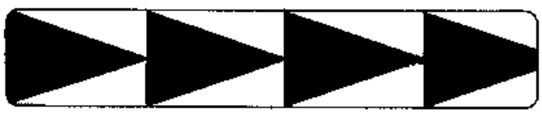
Mostramos un ejemplo de cada uno de los siete tipos de frisos realizados por niños:



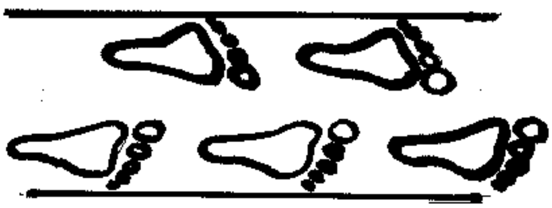
mm (reflexión vertical y horizontal)

mg (reflexión vertical y deslizamiento)

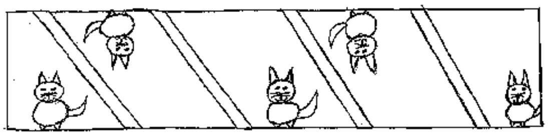
m1 (solamente reflexión vertical)



1m (solamente reflexión horizontal)



1g (solamente deslizamiento)



12 (solamente simetría central)

11 (sin simetría)

De igual modo, si en lugar de efectuar traslaciones en una sola dirección lo hacemos en dos direcciones distintas, obtenemos los llamados grupos cristalográficos planos, pues éste es un problema que se origina en la Cristalografía, habiendo sido estudiado por el cristalógrafo ruso Fedorov. Solamente existen 17 formas de cubrir el plano indefinidamente de manera periódica regular. Estos mosaicos también se llaman en inglés "*grupos de papel pintado*" (wallpaper groups) ya que los empapelados de paredes pertenecen a alguna de estas clases. Encontramos un ejemplo al menos de estos teselados en la Alhambra. El artista holandés M.C. Escher se interesó mucho por la "división regular del plano", y en su obra se pueden apreciar ejemplos de diversos grupos cristalográficos.

La notación de cada una de estas formas es algo más compleja, y tiene en cuenta, además de las transformaciones que intervienen, las retículas poligonales subyacentes.

Algunos ejemplos de mosaicos que existen en la Alhambra:

3. PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA. TEOREMA DE THALES

3.1. Medida y razón de segmentos

En la figura 4 vemos que los niños están midiendo la sombra del árbol, la distancia entre A y C. Supongamos que la longitud de la sombra mide 6 metros. Esto quiere decir que necesitamos poner, de manera contigua y alineados, 6 trozos de una longitud que llamamos *metro*.

En esta situación de medida podemos decir que la razón entre la longitud de la sombra y la longitud del metro es de 6 a 1.

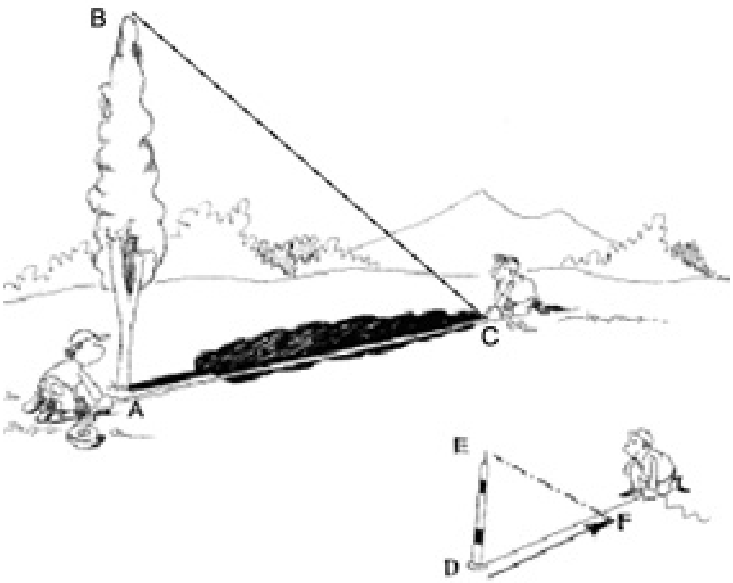


Fig. 4

En general, el proceso de medir una longitud consiste en encontrar el número de veces que tenemos que usar otra longitud, tomada como unidad, para cubrir la longitud dada siguiendo una técnica precisa. La medida que se obtiene depende de la unidad elegida, y puede ser un número natural, racional, o irracional, como ocurre cuando tratamos de medir la longitud de la diagonal de un cuadrado usando el lado como unidad.

Razón de segmentos

Si elejimos un segmento *u* como unidad de medida podemos asignar a cualquier otro segmento un número real, que será su medida con la unidad *u*. La razón entre dos segmentos se define como la razón numérica entre sus respectivas medidas usando una unidad determinada. Simbólicamente,

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{m_u(PQ)}{m_u(RS)},$$ donde $m_u(PQ)$, $m_u(RS)$ indica las medidas de los segmentos PQ, RS con la unidad u.

En el caso de la figura 5 la medida de PQ usando la unidad *u* es 8, y la del segmento RS es 5. Por tanto la razón entre ambos segmentos es 8/5, que será la medida racional de PQ usando RS como unidad, o sea, se puede escribir: PQ =(8/5).RS

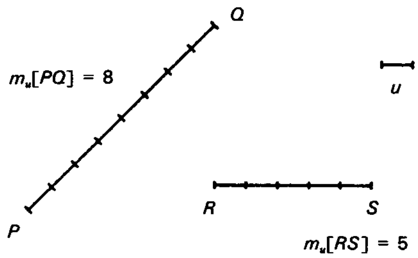


Fig. 5

Ejercicio:
7. Supongamos que dos segmentos cualesquiera se miden con una unidad u_1 y se calcula la razón entre ambos. ¿Qué le ocurre a dicha razón si ambos segmentos se miden con otra unidad u_2 tal que $u_2 = 2.u_1$?

En la figura 4 los niños están midiendo la longitud de la sombra del árbol y también la longitud de la sombra de un bastón. ¿Qué pretenden hacer? ¿Qué harán con las medidas? Parece que han estudiado geometría y saben que existe una relación entre la razón de las longitudes de las sombras y los objetos que las proyectan: Ambas razones son siempre iguales:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

En este tipo de situaciones decimos que las longitudes de las sombras son proporcionales a las longitudes de los objetos: si un objeto tiene doble, triple, ..., altura que otro, su sombra también será doble, triple, ..., que la del otro.

En nuestro ejemplo, si el bastón mide 1 m., su sombra 1'2 m. y la sombra del árbol 6 m., tendremos,

$\frac{1}{1'2} = \frac{x}{6}$, de donde se obtiene que la altura del árbol, x = 5 metros.

Se dice que dos pares de segmentos son proporcionales si las razones que se establecen entre cada par son iguales.

La proporcionalidad entre las longitudes de los objetos y sus sombras se basa en que los rayos del sol se pueden considerar que inciden de forma paralela, dada la gran distancia a que se encuentra el sol. Veamos, a continuación, la explicación matemática de la propiedad que permite calcular distancias y longitudes de objetos en circunstancias similares a la descrita.

3.2. Proyecciones paralelas

Consideremos dos rectas concurrentes *a* y *a'* en el punto O, y sea *b* otra recta en una dirección cualquiera, no paralela ni a *a* ni a *a'*, como se muestra en la figura adjunta. Sean los puntos P, Q, R, S de la recta *a* situados a distancias arbitrarias de O. Tracemos rectas paralelas a la recta *b* que pasen precisamente por los puntos P, Q, R, S. Esas rectas cortan a la recta *a'* en los puntos P', Q', R', S', respectivamente.

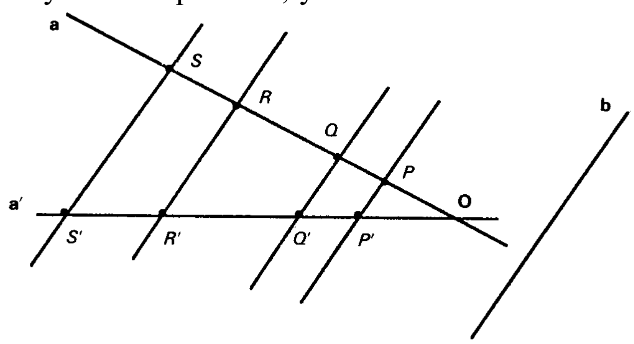


Fig. 6

Para cualquier punto de la recta *a* se puede trazar una paralela a *b* que cortará a *a*' en otro punto. De esta manera se establece una aplicación biyectiva que asocia a cada punto de la recta *a* un punto de la recta *a*'. La proyección paralela de un segmento es el segmento formado por las proyecciones de los extremos del segmento original.

Designemos esta aplicación biyectiva con la notación pp (abreviatura de *proyección paralela*). Esta aplicación cumple las siguientes propiedades:

1) Si dos segmentos son iguales, también lo serán sus proyecciones paralelas, o sea, si PQ = QR entonces pp(PQ) =pp(QR)

Esta propiedad se justifica observando la figura 7. Si las rectas están igualmente espaciadas los triángulos sombreados obtenidos trazando por P', Q', R', rectas paralelas a *a* son iguales, lo que implica que P'Q' = Q'R'.

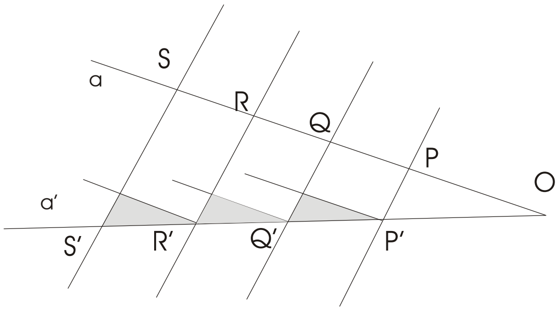


Fig. 7

2) La proyección paralela de la suma de dos segmentos de la recta *a* es igual a la suma de las proyecciones paralelas de dichos segmentos sobre la recta *a'*, o sea,

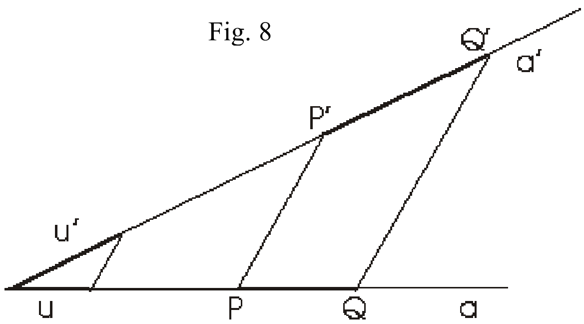
pp(PQ + QR) = pp(PQ) + pp(QR) = P'Q' + Q'R'

En efecto, pp(PQ+QR) = pp(PR) = P'R' = P'Q'+Q'R' = pp(PQ) +pp(QR)

De estas propiedades se deriva que si la serie de segmentos PQ, QR, RS, ... son congruentes, también lo serán los segmentos P'Q', Q'R', R'S', ..., y que si la razón de las longitudes entre dos segmentos es *r*, la razón entre los segmentos proyectados también será *r*.

En general se cumple que la proyección paralela del segmento obtenido al multiplicar la longitud del segmento PQ por cualquier número real *r* es el segmento que se obtiene al multiplicar por *r* la longitud del segmento P'Q'. Simbólicamente, pp(r.PQ) = r.P'Q'.

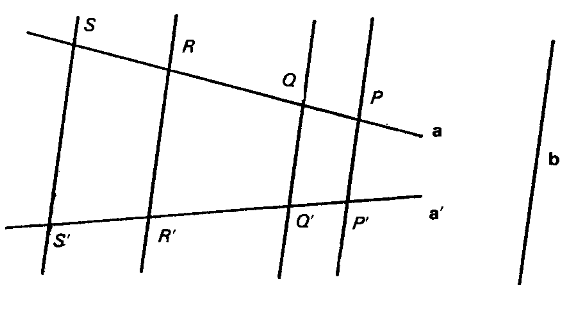
Fig. 8



Si sobre la recta *a* hemos elegido una unidad de medida *u* y sobre la recta *a'* la unidad *u'* podemos establecer una proyección paralela que haga corresponder dichas unidades. Las propiedades mencionadas de las proyecciones paralelas permiten afirmar que si la medida del segmento PQ es m_u(PQ), la medida del segmento proyectado P'Q' con la unidad *u',* $m_{u'}$(P'Q'), será la misma, ya que tales medidas son las razones entre los segmentos y las unidades de medida correspondientes.

3.3. Teorema de Thales

Los segmentos homólogos en la proyección paralela que se establece cuando dos rectas distintas *a* y *a'* son cortadas por un haz de rectas paralelas son proporcionales (ver figura adjunta). Simbólicamente,



$$\frac{PQ}{RS} = \frac{P'Q'}{R'S'}$$

Fig. 9

En efecto, la razón entre los segmentos PQ y RS quiere decir que existe un número real k tal que PQ =k.RS; este número k no es sino la medida de PQ usando RS como unidad. Si aplicamos una proyección paralela a los segmentos de la recta *a*, se verificará,

pp(PQ) = pp(k.RS) = k.pp(RS); o sea, P'Q' = k.R'S', relación que se expresa también en forma de razón: $\frac{P'Q'}{R'S'} = k$, lo que prueba el enunciado del teorema de Thales.

Una consecuencia del teorema de Thales

Toda paralela a un lado de un triángulo determina con los otros dos un nuevo triángulo cuyos lados son proporcionales a los del primero.

En efecto, si en el triángulo ABC trazamos una paralela MN al lado BC, por el teorema de Thales se cumple:

(1) $$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Trazando por N una paralela AB, por el mismo teorema de Thales, tenemos:

(2) $$\frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BC} = \frac{MN}{BC}$$

De las expresiones (1) y (2) se deduce,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

que es el expresión simbólica de la propiedad enunciada.

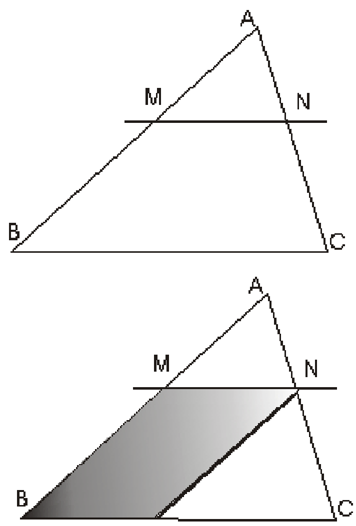
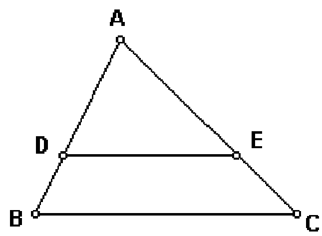


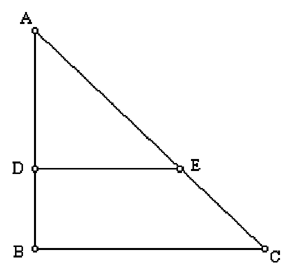
Fig. 10

Ejercicios:

8. Encontrar la medida del segmento EC conociendo que:
BC||DE, |AB|=9cm, |DA|=6cm, |AC|=15cm

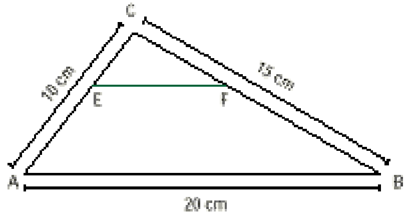


9. Encontrar la medida del segmento AC conociendo que:
DE||BC, medida del ángulo EDA=90º, |AD|=2cm, |DE|=3cm y |BC|=18cm



10. Dividir un segmento en 3 partes de igual medida.
11. Dividir un segmento AB en la razón 2:3

12. Calcula la medida del segmento EF si E y F dividen respectivamente los lados AC y BC del triángulo ABC, en la razón 2:3 siendo AE más largo que EC.



13. Si la razón entre la diagonal de un rectángulo y su lado mayor es 5:4, entonces ¿en qué razón están el lado mayor con el lado menor del rectángulo?. Explicar el procedimiento realizado.

14. La sombra de un rascacielos en un determinado momento del día mide 192 m. Si en el mismo instante y lugar la sombra de una señal de tráfico de 2’5 m de altura, mide 1’5 m, ¿Cuál es la altura del rascacielos?

15. A un incendio producido en un hospital acude la unidad de bomberos con una escalera de 32 m de longitud que consta de 80 peldaños distribuidos uniformemente. Al apoyar la escalera sobre la fachada del edificio se observa que el primer peldaño se encuentra a 30 cm del suelo.
a) ¿Qué altura del edificio alcanzará la escalera?
b) Si el fuego se halla en la quinta planta, y cada planta tiene 4’5 m de altura, ¿podrán ser rescatados los enfermos que allí se encuentren?
c) Puesto que las llamas ascienden hacia arriba, ¿es posible con dicha escalera evacuar las siete plantas de que consta el hospital?

4. TRANSFORMACIONES DE SEMEJANZA

El concepto de movimiento rígido se ha usado para definir de manera precisa la noción de congruencia de figuras, que suele describirse de manera informal como "figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma". La noción informal de figuras semejantes como las que tienen la misma forma puede ser precisada utilizando las transformaciones del plano que se conocen como homotecias y semejanzas.

4.1. Homotecias (transformaciones de tamaño)

Definición:

Sea O un punto del plano y k un número real positivo (Fig. 11). Una *homotecia* de centro O y factor de escala k es la transformación geométrica que transforma cada punto P del plano, distinto de O en el punto P' situado en la semirrecta OP de tal manera que OP' = k.OP, y deja invariante el punto O. La figura adjunta muestra dos ejemplos de tales transformaciones. En la a) el factor de escala es mayor que 1 y en la b) es menor que 1.

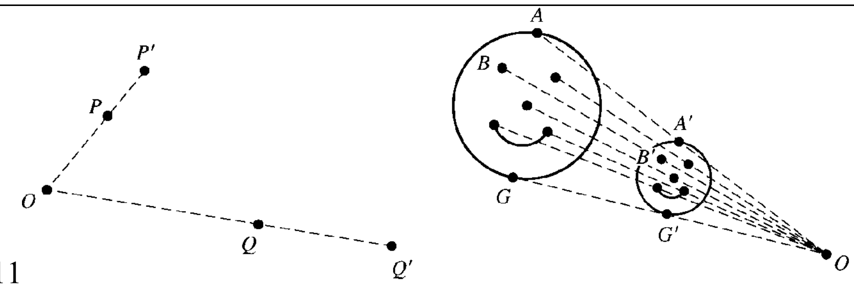


Fig. 11

(a) $\frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} = k, k > 1$	(b) $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = ... = \frac{OG'}{OG} = k, k < 1$

Cuando el factor de escala es mayor que 1, la imagen de una figura por la transformación será de mayo tamaño que el original, y se dirá que la transformación es una *expansión*. Si k < 1 la transformación de tamaño es una *contracción*. Si k = 1, todos los puntos permanecen en su misma posición, o sea, P = P' para todos los puntos, y la transformación de tamaño es la identidad.

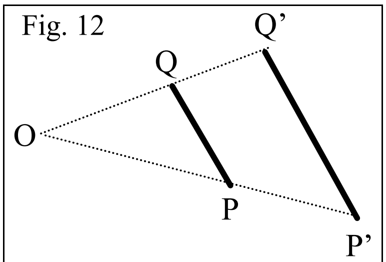
Teorema: Cambio de distancia bajo una homotecia

La distancia entre las imágenes de cualquier par de puntos es k veces la distancia entre sus respectivas preimágenes. Esto es, para cualquier par de puntos P y Q, P'Q' = k.PQ.

Demostración:

Por la definición de homotecia se tiene que OQ' =kOQ, y que OP' = kOP. Los triángulos formados tienen dos lados comunes y el mismo ángulo en O, luego son semejantes. De aquí se deduce que Q'P' = kQP.

Fig. 12



Ejercicio:

16. Demostrar las siguientes propiedades de invariancia de las homotecias:

a) Los segmentos se transforman en segmentos paralelos.
b) Las rectas y semirectas se transforman en rectas y semirectas paralelas
c) La imagen de un ángulo es otro ángulo congruente.
d) Se conserva la razón entre distancias.

4.2. Semejanzas

Definición:

Diremos que una transformación es de semejanza si y sólo si es una secuencia de homotecias (transformaciones de tamaño) y movimientos rígidos.

La figura 13 muestra la transformación de semejanza del triángulo ABC obtenida como composición sucesiva de la homotecia de centro O, seguida de la simetría de eje *l*, y seguida finalmente por otra homotecia de centro P.

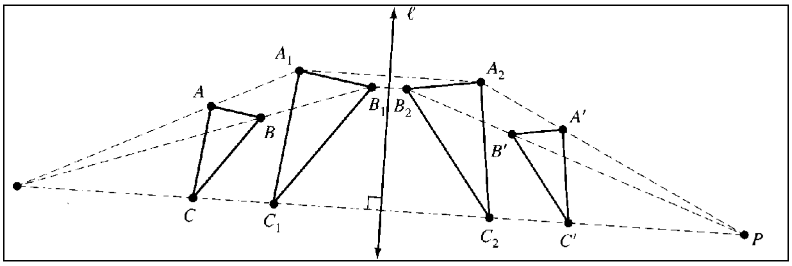


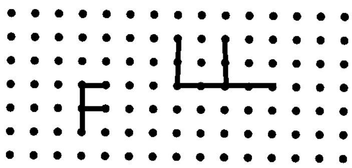
Fig. 13

Definición: Figuras semejantes

Dos figuras F y G se dice que son semejantes, lo que se escribe F ~ G, si y sólo si, existe una transformación de semejanza que transforma una figura en la otra.

Ejercicio:

17. Mostrar que la letra F pequeña de la figura es semejante a la letra F grande girada:



5. MOVIMIENTOS Y GEOMETRÍA DE COORDENADAS. ESTUDIO DINÁMICO CON RECURSOS EN INTERNET

En la página web del Proyecto Descartes, http://www.cnice.mecd.es/Descartes/ , encontramos recursos dinámicos que permiten explorar las propiedades de las traslaciones, giros y simetrías. En el índice del proyecto, http://www.cnice.mecd.es/Descartes/indice_ud.htm encontramos tres entradas para el estudio de la semejanza, movimientos en el plano y las teselaciones. En el apartado de Aplicaciones, http://www.cnice.mecd.es/Descartes/indice_aplicaciones.htm#movimientos encontramos los siguientes recursos:

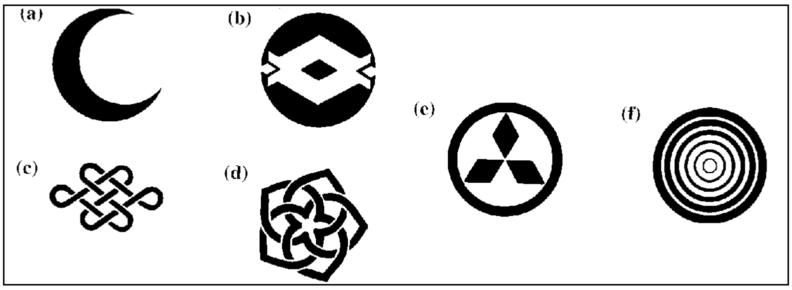
TÍTULO
Teorema de Thales
Semejanza de triángulos
Vectores y traslaciones
Movimientos en el plano
Movimientos en el plano (sobre puntos, segmentos, rectas y ángulos)
Movimientos en el plano (sobre un cuadrado). Coordenadas
Movimientos en el plano (vectores)
Semejanzas en el plano
Semejanzas

6. TALLER MATEMÁTICO

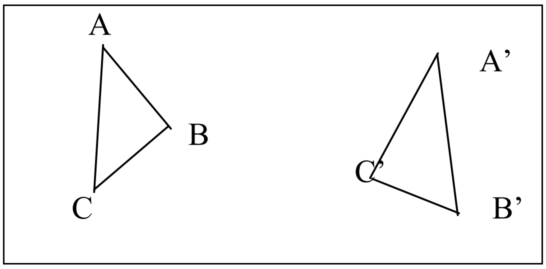
1. Dibujar polígonos con las siguientes simetrías, si es posible.
a) Un eje de simetría pero ninguna simetría rotacional.
b) Simetría rotacional pero ninguna simetría axial.
c) Un eje de simetría y una simetría rotacional.

2. ¿Cuál es el movimiento rígido equivalente a dos medias vueltas (giros de 180º) realizadas sucesivamente sobre dos puntos O_1 y O_2?. (Explica mediante esquemas la solución; puede ser útil representar con una letra la distancia entre los centros de giro).

3. Para cada una de las figuras adjuntas determinar:
a) los ejes de simetrías;
b) los ángulos de las simetrías de rotación que tengan



4. Dibuja la figura adjunta de tal manera que el triángulo ABC sea congruente al A'B'C'.



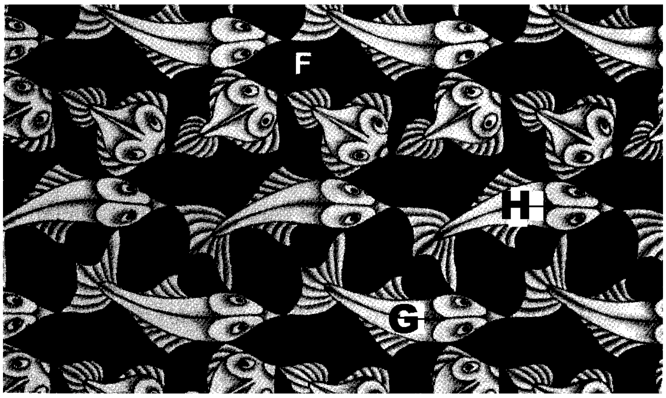
a) Usar un espejo (u otra herramienta de dibujo) para trazar la recta m_1 de manera que A' sea el punto simétrico del A. Dibujar también las imágenes del B y C mediante m_1 y nombrarlas como B_1 y C_1.
b) Dibujar la recta m_2 de manera que B_1 sea el simétrico de B'. ¿Cuál es la imagen de C_1 sobre m_2?.
c) Usar las rectas m_1 y m_2 para describir el movimiento rígido que transforma el triángulo ABC en el A'B'C'.

5. Describir las simetrías en los siguientes patrones planos formados repiendo letras mayúsculas. Para las simetrías de rotación dar el centro de giro y la amplitud del ángulo de giro. Para las simetrías y simetrías con deslizamiento dar las direcciones de los ejes y los vectores correspondientes.

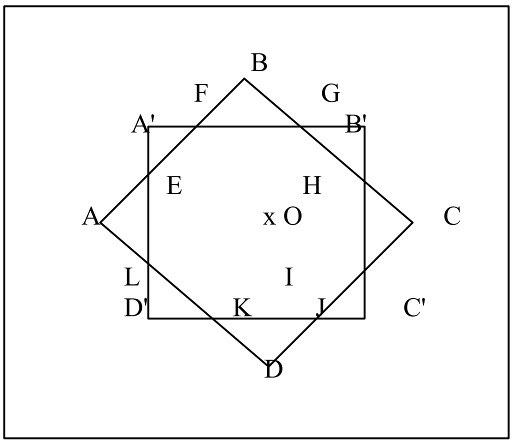
a) A A A A A A A A A A A A A A A A	B) E E E E E E E E E E E E E E E E	C) N N N N N N N N N N N N N N N N

d) Z N Z N N Z N Z Z N Z N N Z N Z	e) p q p q d b d b p q p q d b d b	f) E E E E E E E E E E E E E E E E

6. En la figura adjunta se representa un fragmento de un recubrimiento del plano elaborado por M. C. Escher. Se han marcado tres peces grandes con las letras F, G. y H.
a) ¿Qué tipo de movimiento rígido hace coincidir F con G?
b) Qué tipo de movimiento rígido hace coincidir F con H?



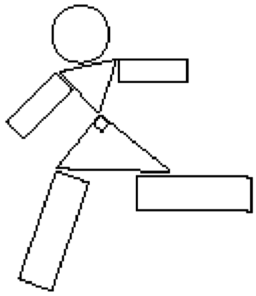
7. En la figura adjunta, el cuadrado A'B'C'D' se ha obtenido girando el cuadrado ABCD 45º alrededor del punto O. (el segmento AB = A'B')



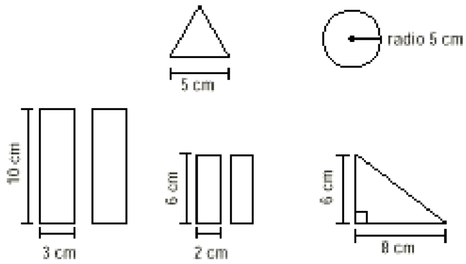
Propiedades de la figura:
a) ¿Cómo son los triángulos FBG, GB'H, HCI, IC'J, JDK, ...?
b) Desmostrar que los puntos A, A', B, B', C, C', D, D' están sobre una misma circunferencia.
c) ¿Es regular el octógono EFGHIJKL?. Justificar la respuesta.
d) ¿Cuántos ejes de simetría tiene esta figura?

8. Una empresa ha diseñado un juego para niños que permite armar figuras como la del dibujo a). Las piezas y sus medidas son las indicadas en b)

a)



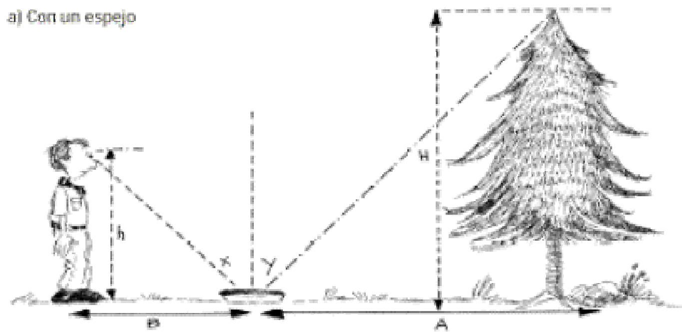
b)



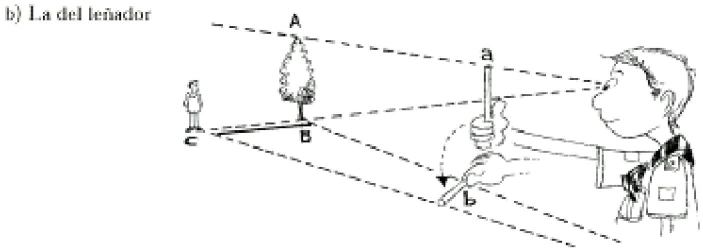
Por diversas razones, la empresa decide agrandar estas piezas con el siguiente criterio: lo que mide 5 cm pasará a medir 8 cm; el resto de las medidas se deben ajustar a ese criterio para mantener la proporción. Diseñar en cartulina las piezas del juego ya ampliado. Analizar y comentar los procedimientos utilizados. ¿Cuál fue la pieza que ofreció mayor (o menor) dificultad para rehacerla?

9. Distancias o alturas aplicando la semejanza

Los dibujos siguientes ilustran diversas maneras, utilizadas habitualmente por los guías y scouts, para estimar alturas y distancias. Justificar los distintos procedimientos.

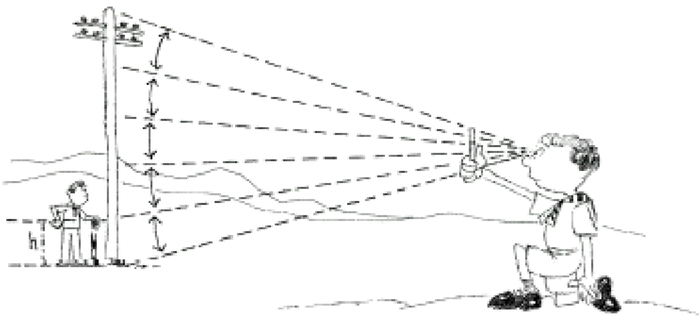


En este caso, es necesario que la persona pueda observar el extremo superior del árbol reflejado en el espejo.



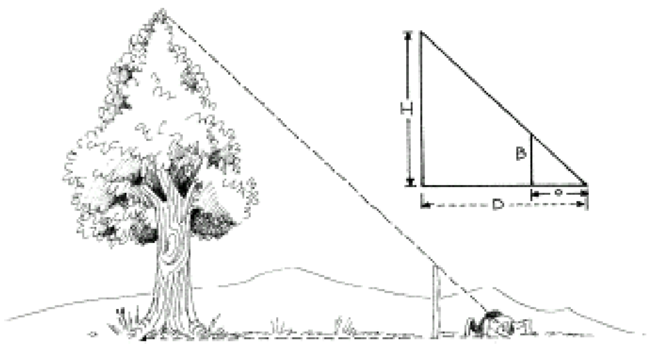
Mirando con un solo ojo, se cubre la altura del árbol con una varita o un lápiz que se sostiene en la mano. Girar la mano en 90º y que una persona se ubique en el punto que corresponde al extremo libre de la varita.

c) ¿Cuántas veces cabe?



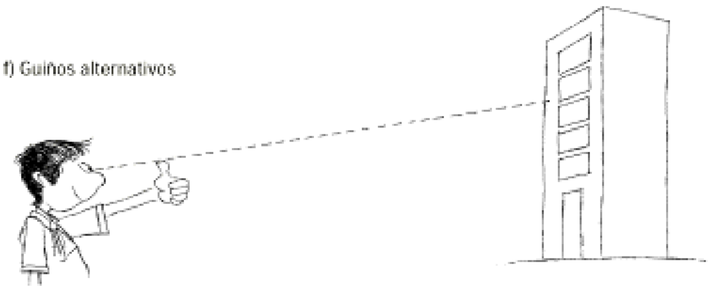
Colocar al pie de un poste una persona o vara de altura conocida. Ubicarse a una distancia adecuada, mirando con un solo ojo y recurriendo a un lápiz o varita que se sostiene con la mano, cubrir la persona y contar cuántas veces cabe en la altura de dicho poste.

e) Haciendo coincidir los extremos



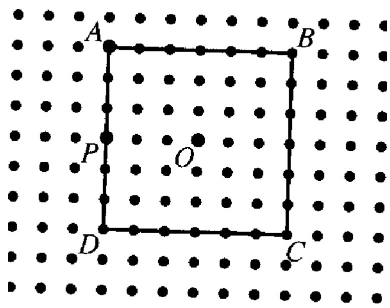
Es necesario ubicarse a una distancia tal que mirando con un solo ojo queden alineados el extremo superior del árbol y el de la vara de longitud conocida.

f) Guiños alternativos

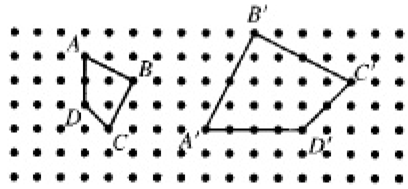


Con el brazo estirado, utilizar como mira el dedo pulgar para ubicar dos puntos sobre el edificio, mirando primero con un ojo y después con el otro. Estimar la distancia entre ambos puntos, multiplicarla por 10 para obtener una estimación de la distancia que los separa del edificio. El factor 10 deriva de la razón entre la medida aproximada de la distancia entre ambos ojos (6 cm) y la longitud de los brazos (60 cm) un promedio aproximado y cómodo para hacer los cálculos.

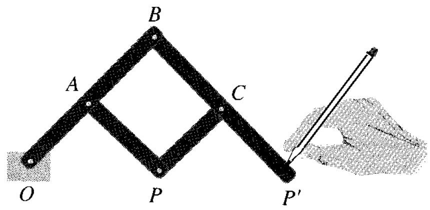
10. Copiar en papel pautado el cuadrado ABCD de la figura adjunta. Dibujar las imágenes del cuadrado en las siguientes transformaciones. Hacer un dibujo separado para cada uno de los casos a), b) y c).
a) Homotecias con centro O y cada uno de los factores de escala, 1/3, 2/3, 4/3.
b) Homotecias con centro A y cada uno de los factores de escala, 1/3, 2/3 y 4/3.
c) Homotecias con centro P y cada uno de los factores de escala, 1/3, 2/3 y 4/3.



11. Describir una semejanza que transforme el cuadrilátero ABCD en el cuadrilátero A'B'C'D' según se indica en la figura adjunta. Dibujar las imágenes intermedias de la homotecia y el movimiento rígido que compone la semejanza.



12. Un pantógrafo es un dispositivo mecánico que se usa para hacer ampliaciones o reducciones de dibujos. Se puede construir una versión simple usando tiras de cartulina que se unen de manera articulada con algún tipo de remache formando un paralelogramo con dos lados prolongados, como se indica en la figura. El punto O se mantiene fijo en la superficie en la que se van a trazar los dibujos mientras que el P se mueve sobre la figura a copiar. El lápiz situado en P' traza la ampliación. (Si se invierte la función de los puntos P y P' se obtiene una reducción).
a) Explicar por qué el pantrógrafo permite hacer homotecias de manera mecánica.
b) ¿Cuál es el factor de escala de la homotecia? Considerar que todos los puntos adyacentes a lo largo de una banda están a la misma distancia.



C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

Las orientaciones curriculares del MEC (DCB) para la educación primaria incluyen en el bloque 4, "Las formas en el espacio", dentro del apartado de "procedimientos", las siguientes indicaciones:

6. Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos.
7. Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado (puntos y ejes de simetría).

Los Principios y Estándares 2000 del NCTM proponen que los programas de enseñanza de matemáticas para los niveles de educación infantil y primaria incluyan el logro del objetivo general: *"Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas"*. Este objetivo se concreta para los niveles de infantil a 2º curso:

- reconocer y aplicar traslaciones, giros y simetrías;
- reconocer y crear formas que tengan simetría.

Para los niveles 3º a 5º se amplian de la siguiente manera:

- predecir y describir los resultados de deslizar, voltear y girar formas bidimensionales;
- describir un movimiento o una serie de movimientos que muestren que dos formas son congruentes;
- identificar y describir las simetrías en formas y figuras bidimensionales o planas y tridimensionales.

Ejercicio:
Analizar las diferencias y semejanzas de las orientaciones curriculares propuestas para el estudio de las transformaciones geométricas, la simetría y la semejanza en:
- Diseño Curricular Base (MEC)
- Orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

De acuerdo con Dickson, Brown y Gibson (1991), el estudio de las transformaciones de las figuras geométricas ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría basada en teoremas y demostraciones deductivas. Al parecer, su principal valor reside, para la mayoría de los niños, en el estudio de ciertas transformaciones por el valor intrínseco de éstas, no tanto porque contribuyan a proporcionar una imagen unificada de las matemáticas. El estudio de las transformaciones se puede basar en acciones fáciles de realizar (por medio de plegados y giros), por lo que pueden servir para generar descubrimientos relativos a las transformaciones y para comprobar las predicciones e inferencias de los niños. También contribuye a resaltar aspectos más tradicionales de la geometría, como la congruencia y la semejanza.

La comprensión por los niños de distintas edades de las traslaciones, giros y simetrías ha sido evaluada en distintas investigaciones. Thomas[1] propuso el siguiente test clásico de conservación de la longitud de segmentos a un grupo de 30 niños, 10 de cada una de las edades 6, 9, y 12 años:

Se presentan dos varillas de la misma longitud:

Seguidamente se desplaza una de las varillas:

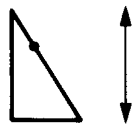
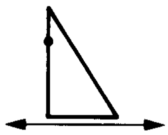
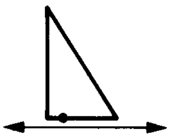
se pregunta al niño si son de la misma longitud, o si una es más larga o más corta que la otra.

Los resultados de Thomas para esta experiencia indicaron que a la edad de 6 años, 8 de cada 10 niños no tienen sentido de conservación de la longitud ante la traslación, a la edad de 9 años son 7 de cada 10 y a la de 12 todos los niños comprendían la invariancia de los segmentos.

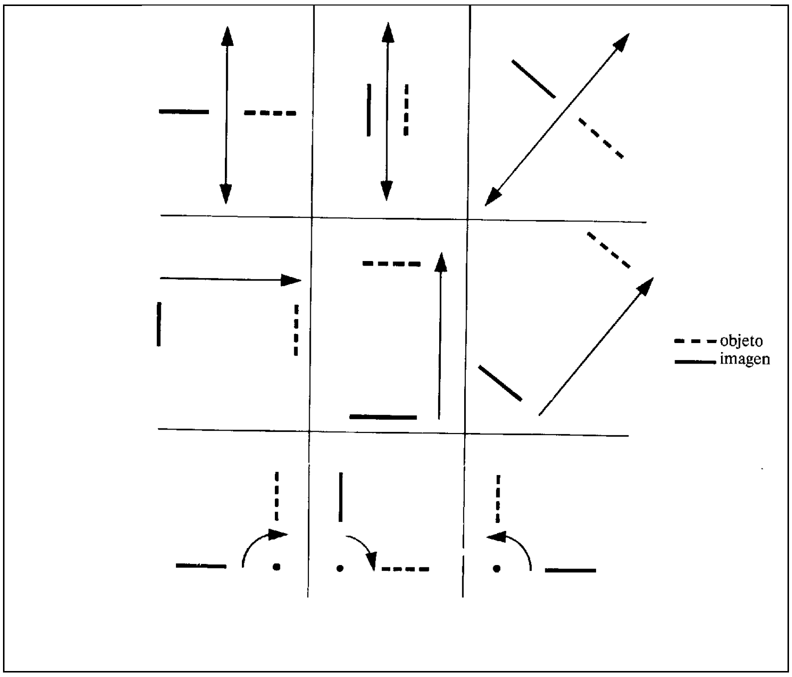
Esta misma autora propuso a los niños tareas relativas a la transformación de un triángulo al aplicarle traslaciones, giros y simetrías. Los niños tenían que comparar la longitud de un lado del triángulo antes y después de cada movimiento, diciendo si era "más corto", "más largo" o "igual" que antes. Casi todos los alumnos de Thomas consideraron que la longitud permanecía invariante en las rotaciones y en las simetrías, pero en el caso de la traslación, los niños con un sentido insuficiente de la conservación opinaron que las longitudes de los lados de la figura geométrica cambiaban.

Otra serie de tareas usadas por Thomas estaban dirigidas a descubrir si los niños comprendían que un punto particular del lado de un triángulo conservaría la misma posición sobre ese mismo lado al seguir cierta transformación de la figura. Practicamente todos los alumnos de 12 años sitúan el punto en la posición correcta, pero los de 6 y 9 años tienen importantes dificultades. Cuando se le da al triángulo un giro de 90º en sentido horario, el 60% de los niños de 6 años y el 50% de los de 9 años fallan. Para las preguntas sobre el efecto de la simetría los resultados se indican en la tabla adjunta:

[1] Citado por Disckon et al. (1991, p. 65)

		Niños de 6 años	Niños de 9 años	Niños de 12 años
Simetría respecto de un eje vertical		80 %	70 %	100 %
Simetría respecto de un eje horizontal		75 % Sólo 8 alumnos en este caso	70 %	100 %
Simetría respecto de un eje horizontal		80 %	60 %	100 %

Otro investigador que ha estudiado el desarrollo de la comprensión de los movimientos por niños de edades entre ocho, nueve y diez años ha sido Kidder[2]. Propuso a los niños el test clásico de conservación de longitudes, proporcionándoles definiciones operativas de las traslaciones, simetrías y giros. En las pruebas se utilizaron listores de unos 10 centímetros de longitud y flechas hechas con alambres para indicar los diversos movimientos. El listón se situaba frente al niño, junto con la flecha de alambre. Se le superponía al listón original otro idéntico, y se le mostrata al niño la transformación deseada realizándola sobre el listón de encima, dejando fijo el original. Cada movimiento se repetía varias veces y a continuación lo hacía el niño por sí solo. La figura adjunta muestra los movimientos enseñados.



[2] Citado por Dickson et. al. (1991).

Los niños que tuvieron éxito en la ejecución de estas transformaciones pasaron a integrar el grupo de 20 de cada edad, los cuales prosiguieron con la segunda fase del estudio, realizando el test sobre las transformaciones. Se trataba de ver si reconocían la invariancia de la longitud del listón tras la aplicación de los movimientos. Con dicho fin se utilizaba un listón objeto, un movimiento indicado (similar a los mostrados en la figura) y otros cinco listones, de los cuales solamente uno tenía la misma longitud que el listón objeto. Se le pedía al niño que utilizase uno de los listones para que mostrase qué aspecto tendría una vez efectuado el movimiento indicado. Se le dijo a cada niño que podía medir si lo deseaba, con el fin de que supiera claramente que le estaba permitido comparar los listones. Se animó a cada uno de los niños a que explicase sus accciones.

Los resultados indicaron (sorprendentemente, en vista de lo asegurado por Piaget) que solamente un 31% reconocieron la conservación de longitud en el sentido clásico durante la etapa inicial de la investigación; concretamente tuvieron éxito el 40% de los niños de ocho años, 55% de los niños de 9 años y 60% de los de 10. Sin embargo, cuando se aplicó el test de las transformaciones, solamente el 23% de los niños con sentido de conservación clásico eligieron coherentemente el listón imagen de longitud correcta correspondiente a la traslación. Entre las conclusiones de Kidder está que la conservación de longitud en sentido clásico piagetiano no es suficiente para garantizar tal conservación en operaciones mentales más complejas.

Remitimos al lector al libro citado de Dickon et. al. (1991) para un estudio más completo de este apartado sobre desarrollo de la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas por los niños.

3. SITUACIONES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

Algunas propiedades de las formas geométricas merecen una atención especial, como son las que corresponden a la simetría y la semejanza. Las actividades que se pueden proponer para investigar este tipo de propiedades geométricas pueden requerir diversos niveles de desarrollo del pensamiento geométrico por parte de los estudiantes, aunque en la mayor parte de estas actividades se pone en juego el nivel 1 o superior. Los alumnos que estén en el nivel 0 pueden ser capaces, no obstante, de trabajar con ellas aunque puede que no apliquen estas propiedades a clases completas de formas geométricas. Los alumnos que estén en el comienzo del nivel 2 pueden ser puestos en situación de ver cómo se relacionan las propiedades o qué condiciones dan lugar a propiedades particulares.

3.1. Juegos de psicomotricidad

Las situaciones de juego de psicomotricidad parecen muy recomendables para iniciar el estudio de distintos aspectos de la geometría, y de manera especial en el caso de los movimientos. En el libro de A. Martínez y F. Juan (1989) encontramos abundantes ejemplos de este tipo de situaciones, así como los fundamentos metodológicos en los que basan su propuesta curricular. Describimos, a continuación dos situaciones de este tipo, una para familiarizar a los alumnos de segundo ciclo de primaria sobre los giros y otra sobre las simetrías. En ambos casos se supone que los niños tienen posibilidad de moverse con libertad por una sala de dimensiones adecuadas en la que hay colocado al menos un espejo grande.

Actividad 1: Psicomotricidad y apreciación del giro

- Nos movemos libremente por el espacio
- Nos movemos dando vueltas sobre nosotros mismos, girando (hay que cambiar el sentido de giro para evitar mareos). Seguir girando pero en el suelo.
- Nos ponemos por parejas y buscamos diferentes formas de girar juntos. Buscamos giros que impliquen un desplazamiento y giros sin desplazamiento
- Nos movemos por grupos y buscamos distintas formas de girar juntos. Buscamos giros con desplazamientos y giros sin desplazamientos.
- Nos juntamos todos y buscamos distintas formas de girar juntos, con desplazamiento o sin desplazamiento.
- Buscamos objetos de la clase que puedan girar y jugamos con ellos, con su giro.
- Buscamos objetos de la clase que puedan girar y donde quepamos dentro nosotros, para girar con ellos (se procurará que haya neumáticos viejos, cestas de mimbre, cajas cilíndricas, etc.)

Actividad 2: Psicomotricidad y simetrías

- Nos movemos libremente por el espacio al ritmo de una música.
- Nos colocamos delante de un espejo grande (que habrá en clase), nos seguimos moviendo por el espacio y nos vemos en el espejo. Nos alejamos y acercamos al espejo, movemos una mano y la otra, etc.
- Por parejas jugamos a los juegos de imitación. Uno se pone delante y se mueve como quiere. El otro se pone detrás e imita su movimiento. Después se intercambian las posiciones.
- Seguimos por parejas jugando a los juegos de imitación, pero ahora al "juego de los espejos". Al igual que antes, uno imita el movimiento de otro, pero ambos se ponen frente a frente, de manera que el que imita hace las veces de imagen reflejada por un espejo.
- Se reparten varillas de madera. Seguimos jugando al espejo, pero ahora intervienen también los palos.
- Nos ponemos por grupos. Unos hacen de figura y los otros de figura imagen. Hacemos las figuras con nuestros cuerpos y con los palos.
- Continuando con el ejercicio anterior, la figura original se hace con los palos en el suelo. Se coloca una cuerda en el suelo (haciendo las veces de espejo), separando la figura original de su "imagen reflejada".
- Análogo al anterior, pero por parejas y con palos pequeños.

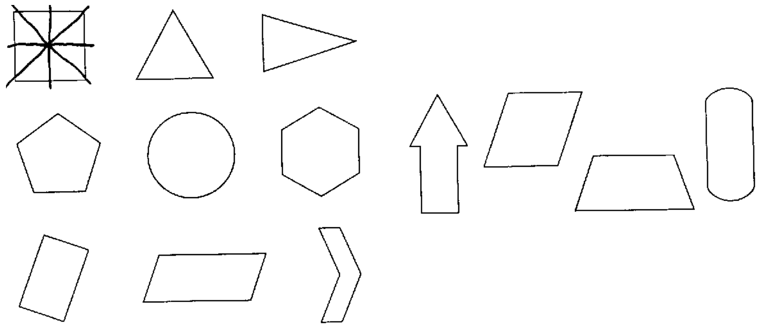
Remitimos al lector al libro citado de Martínez y Juan (1991, p. 102-103) para encontrar una rica colección de actividades complementarias de exploración de las transformaciones geométricas en la clase de matemáticas.

3.2. Simetría axial

Es importante que los niños vean la simetría en los objetos que les rodean; es conveniente poner en el tablón de clase dibujos o fotografías de objetos que tengan simetrías, y que los niños dibujen o construyan formas simétricas. Una manera sencilla de hacerlo puede ser doblando una hoja de papel y haciendo diversos recortes de los bordes: al desdoblar la hoja se obtendrán figuras con eje de simetría por el doblez inicial.

Actividad 3:

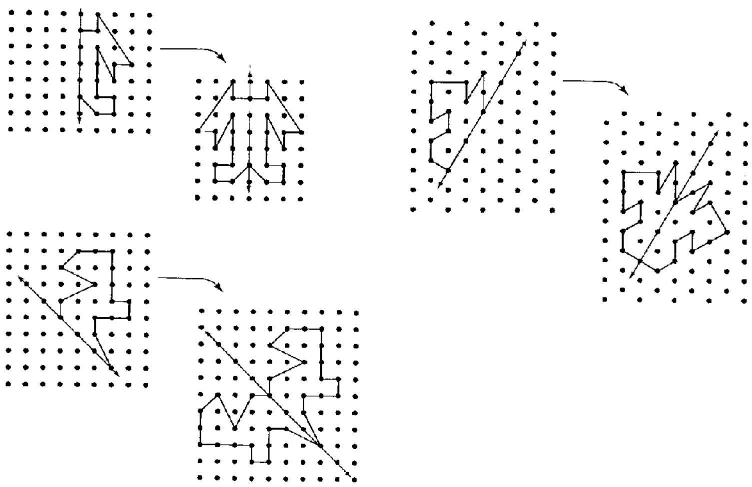
Dibujar los ejes de simetría de cada una de estas figuras. Trazar las figuras sobre una hoja y comprobar mediante doblado las respuestas.

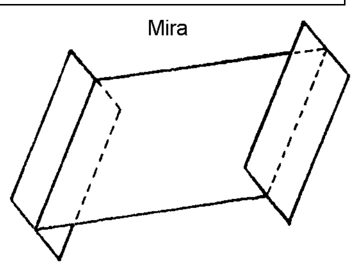


Incluimos a continuación algunos tipos de actividades y materiales que se pueden proponer para el estudio de las propiedades de simetría de las figuras.

Actividad 4: Simetría usando la cuadrícula de puntos

Sobre un geoplano, o usando papel cuadridulado, trazar una recta. Trazar una figura a uno de los lados de dicha recta y que alguno de sus lados toque a la recta. Dibujar la imagen simétrica de la figura tomando como eje de simetría la recta trazada. Comprobar el resultado con un espejo situado sobre el eje. Comprobar también el resultado doblando el papel por el eje de simetría

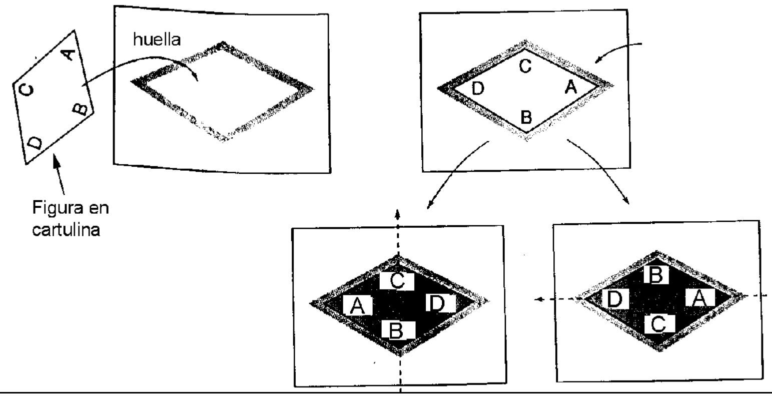




Un dispositivo útil para el estudio de las simetrías y las transformaciones es una pieza de metacrilato transparente de color rojo conocida como “mira”, de forma rectangular y con unas dimensiones que suelen estar alrededor de los 9 x 15 cm^2. Uno de los bordes de 15 cm. está biselado, de modo que presente una línea de contacto con el papel, sobre el que posteriormente se apoyará, lo más fina posible. Dicha pieza rectangular se mantiene completamente vertical sobre el plano del papel mediante dos piezas laterales, que pueden ser del mismo material o de madera. Al colocar la mira sobre un eje de simetría de una figura se reflejará sobre el metracrilato, de manera visible, la otra mitad simétrica de la figura.

Actividad 5 (movimientos sobre la huella):

Recortar en cartulina una forma poligonal, por ejemplo un rombo, como se muestra en la figura adjunta. Identificar los vértices con letras por ambas caras, de manera que se ponga la misma letra en cada vértice en las dos caras en que se puede mostrar. Sobre una hoja de papel trazar el contorno de la figura; obtenemos lo que podemos denominar la "huella" de la figura sobre la hoja. ¿De cuántas manera diferentes se puede mover la pieza de tal manera que tras el movimiento vuelva a coincidir con la huella? Se supone que en los movimientos la pieza puede levantarse del plano.
Los alumnos pueden descubrir que para una forma plana hay tantas líneas de simetría como maneras diferentes se pueda mover la figura de manera que vuelva a coincidir con su "huella".



3.3. Simetría rotacional

Una de las introducciones más sencillas de la simetría rotacional es usando las huellas de figuras trazadas como se ha hecho en la actividad anterior. Si una figura se ajusta a su huella de más de una manera sin que se levante del plano (sin voltearla) tiene simetría rotacional. El número de maneras diferentes en que una figura se puede hacer coincidir consigo misma es el orden de la simetría rotacional. Un cuadrado tiene simetría rotacional de orden cuatro y un paralelogramo con los lados y ángulos desiguales tiene una simetria de orden 2, pero ningún eje de simetría.

Actividad 6: Construcción de formas girables

Usar teselas, geoplanos, o papel cuadriculado para dibujar una forma que tenga simetría rotacional de un orden dado. Excepto para los polígonos regulares esta actividad puede suponer un cierto desafío. Para probar el resultado, trazar la huella de la forma sobre un papel y recortarla en cartulina. Rotar la figura buscando los casos en que coincida con la huella.

3.4. Simetría de figuras tridimensionales

Actividad 7: Simetría plana en construcciones de cuerpos

Usando cubos encajables hacer construcciones que tengan un plano de simetría. Si el plano de simetría pasa entre los cubos, separar el cuerpo en las dos partes simétricas. Tratar de hacer construcciones con dos o más planos de simetría.

3.5. Figuras semejantes

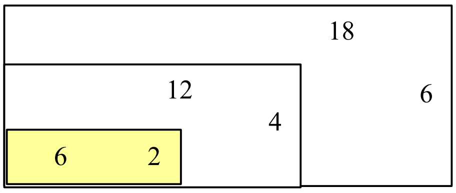
Tanto en dos como en tres dimensiones dos figuras pueden tener la misma forma pero dimensiones diferentes. En el nivel 0 de razonamiento el concepto de "semejanza" es estrictamente visual y posiblemente no será preciso. En el nivel 1, los alumnos pueden comenzar a hacer medidas de ángulos, longitudes de lados, calcular áreas y volúmenes (de los sólidos) que sean semejantes. De esta manera se pueden encontrar relaciones entre formas semejantes. Por ejemplo, los alumnos pueden encontrar que todos los ángulos que se corresponden deben ser congruentes, pero que otras medidas varían de manera proporcional. Si un lado de una figura semejante a otra es de triple tamaño que el correspondiente en la figura pequeña, esa misma relación habrá entre todas las restantes dimensiones. Si la razón entre las longitudes correspondientes es de 1 a n, la razón entre las áreas será de 1 a n^2, y la razón entre los volúmenes será de 1 a n^3.

Como vemos el estudio de la semejanza de figuras está estrechamente relacionado con el estudio del razonamiento proporcional.

Una primera definición de figuras semejantes que se puede dar a los alumnos es que son figuras que "tienen el mismo aspecto" pero tamaños diferentes. Para ayudarles a comprender este concepto se pueden dibujar tres rectángulos en la pizarra. Hacer que dos sean semejantes, por ejemplo, con lados de razón 1 a 2. El tercer rectángulo deberá ser muy diferente, con lados en razón de 1 a 10, por ejemplo. ¿Qué rectángulos se parecen más? Al principio la noción de semejanza se desarrollará de manera intuitiva; después se podrá dar una definición más precisa: Dos figuras son semejantes si todos los ángulos son congruentes y las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales. La siguiente actividad se puede hacer antes de proporcionar este tipo de definición.

Actividad 8: Construir una figura semejante

Dibujar o construir al menos tres figuras semejantes a una forma dada (rectángulos, triángulos o círculos, o cualquier polígono; en tres dimensiones pueden ser prismas rectangulares o cilindros circulares). Después de hacer las figuras, los alumnos medirán al menos tres longitudes en cada figura. También pueden calcular las áreas y los volúmenes. Poner todas las medidas en una tabla para hacer las comparaciones entre las mismas. Sugerir algunas comparaciones mediante razones.



Rectángulos semejantes

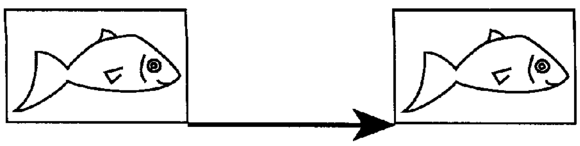
Comparar las razones de las longitudes de los lados y las razones entre las áreas.
Ejemplo: Razones entre el pequeño y el grande
Longitud: 2 a 6 (1 a 3)
Área: 12 a 108 (1 a 9)

4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Se han realizado diversas investigaciones para estudiar la comprensión por los niños de diferentes edades de las propiedades de las figuras que son invariantes ante las transformaciones geometrías (traslaciones, giros y simetrías) y la construcción de las figuras transformadas. Incluimos a continuación algunos items, índices de dificultad y algunos tipos de errores observados.

Traslaciones

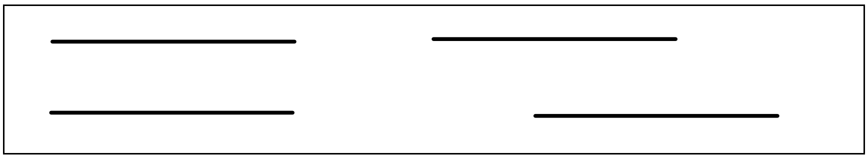
La traslación es la isometría más sencilla y, por lo tanto, plantea menos dificultades que las simetrías y los giros[3]. Las dificultades suelen surgir en los siguientes aspectos:
- La comprensión del concepto de vector libre como vector asociado a una traslación. Los estudiantes tienen la tendencia a pensar que una traslación consiste en llevar la figura hasta el extremo de la flecha dibujada indicativa de la traslación.
- La realización de traslaciones cuando la figura tiene forma poligonal (especialmente si es rectangular) y el vector de la traslación es paralelo a uno de sus lados. Es muy frecuente el error consistente en dibujar el vector empezando en un extremo del lado inicial y terminando en el otro extremo del lado imagen:



Conservación de la longitud de segmentos ante las traslaciones

Un test clásico de conservación de la longitud fue usado por Piaget. Se vale de dos varillas de la misma longitud; seguidamente se desplaza una de las varillas y se hacen preguntas al niño: ¿Son de la misma longitud? ¿Es una más larga o más corta que la otra?

[3] Jaime y Gutiérrez (1996, p. 68)



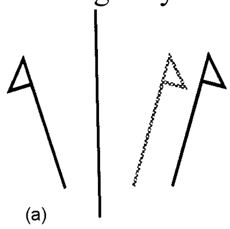
La mayoría de los estudios de este tipo han llevado a la conclusión de que los niños afirman que los segmentos tienen la misma longitud por término medio entre los seis y los ocho años de edad; reconocen que a pesar del desplazamiento, las longitudes de las varillas permanecen iguales. En estadios anteriores, no se llega a distinguir plenamente la longitud de la varilla de la posición de los extremos.

Simetrías

Jaime y Gutiérrez (1996) clasifican los errores de los alumnos sobre las simetrías en dos grupos:

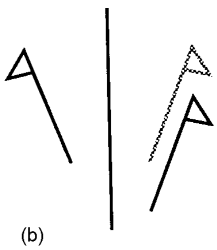
1) Errores cuyo origen está en el concepto de simetría, ya que surgen cuando los estudiantes no aplican correctamente las dos propiedades que relacionan una figura y su imagen:

- Falta de equidistancia al eje de cada punto y su imagen, como se muestra en la figura (a), donde la imagen correcta aparece punteada:



(a)

- Falta de perpendicularidad respecto del eje del segmento que une un punto y su imagen (b):

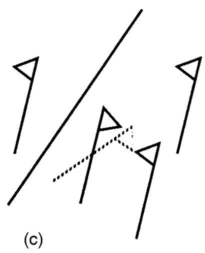


(b)

- Combinaciones de los dos errores anteriores. En todos los casos, los estudiantes olvidan alguna de las dos características de las simetrías, o ambas.

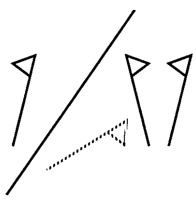
2) Errores cuyo origen está en una interpretación reducida o deformada de la simetría, que surgen cuando los estudiantes utilizan concepciones erróneas de tipo visual:

- Dibujo de la imagen paralela a la figura original aunque ésta no sea paralela al eje (c):



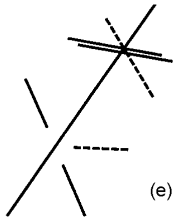
(c)

- Desplazamiento horizontal o vertical de la figura aunque el eje de simetría esté inclinado (d):

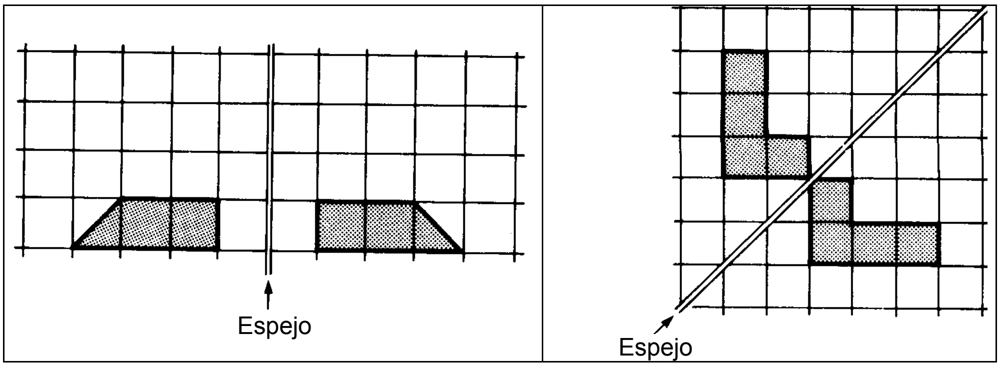


(d)

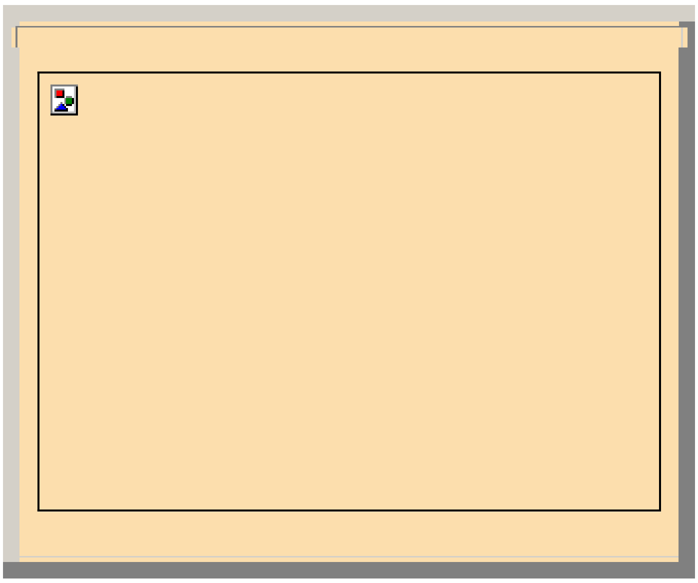
- Combinaciones de los dos errores anteriores, y dibujo de la imagen sobre la prolongación de la figura dada en alguna dirección específica (e).



Los índices de dificultad de las tareas dependen en gran medida de los valores particulares de algunas variables. Por ejemplo, la construcción de la imagen de una figura por una simetría resulta bastante más difícil si el eje no es vertical. Alrededor del 80% de los niños de 11 años dibujan la figura simétrica cuando el eje es vertical. Sin embargo, sólo el 14% tuvieron éxito cuando el eje era oblícuo [4]:



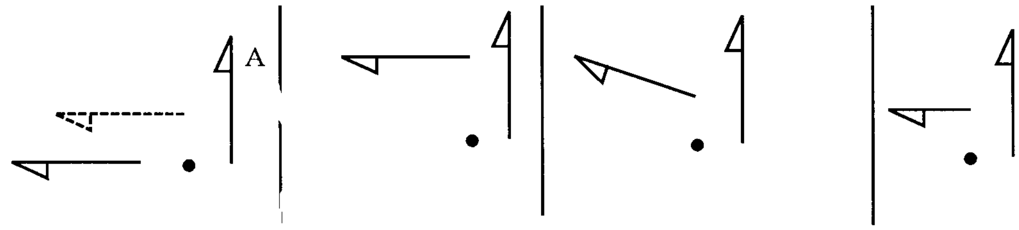
A título de ejemplo incluimos, a continuación, una de las preguntas incluidas en la evaluación internacional conocida como TIMSS[5], aplicada en España, sobre reconocimiento de ejes de simetría. El 47% de los alumnos de 13 años (7º de EGB) respondieron correctamente:



[4] Dickon, Brown y Gibson (1991, p. 75).
[5] http://www.ince.mec.es/pub/

Giros

Para comprender y usar correctamente el concepto de rotación de una figura, es necesario que los estudiantes apliquen bien las siguientes cinco características de esta transformación geométrica: reconocimiento global, ángulo de giro, equidistancia al centro, ángulo entre un punto y su imagen, y congruencia de las figuras[6]. En la siguiente figura se muestran cuatro errores típicos al aplicar un giro de 90º a la figura A sobre el punto marcado:



- a - - b - - c - - d -

En la parte (a) destaca el fallo del ángulo de giro, en la (b) la falta de equidistancia al centro, en la (c) la perpendicularidad entre el objeto y su imagen, y en la (d) la falta de congruencia de las figuras.

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

- Estudia el desarrollo del tema de "Transformaciones geométricas. Simetría" en dichos niveles.
- Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
- Busca algún tipo de problema o tarea que consideres que no está representado en la muestra de problemas que hemos seleccionado como actividad introductoria del estudio de este tema.
- Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
- Describe los cambios que introducirías en el diseño de las lecciones propuestas para los cursos 4º, 5º y 6º de primaria.

5.2. Análisis y construcción de situaciones introductorias

La figura incluida a continuación corresponde a una situación introductoria del estudio de la simetría en un libro de 4º de primaria[7].

a) ¿Piensas que los niños necesitan algunos conocimientos previos para entender la tarea?

b) ¿Qué respuestas esperan los autores por parte de los niños?

c) Indica algún recurso que podrían usar los niños para explorar la situación.

---

[6] Jaime y Gutiérrez (1996, p. 67).

[7] Ferrero, L. et. al. (1997). Matemáticas, 4º curso Primaria. Madrid: Anaya.

d) Diseña situaciones introductorias (que motiven y contextualicen) el estudio de las traslaciones y rotaciones)

La mariposa o la fachada del edificio son figuras que tienen eje de simetría.
Las dos manos o el cisne y su imagen en el agua son figuras simétricas respecto a un eje.

Observa y contesta:
1. ¿Qué ocurre si doblas cada una de estas ilustraciones por la línea de puntos?
2. ¿Podrías hacer coincidir una mano sobre la otra sin darle la vuelta?
3. ¿Qué parecidos y qué diferencias encuentras entre el cisne y su imagen en el agua?

5.3. Visualización de transformaciones geométricas mediante programas interactivos

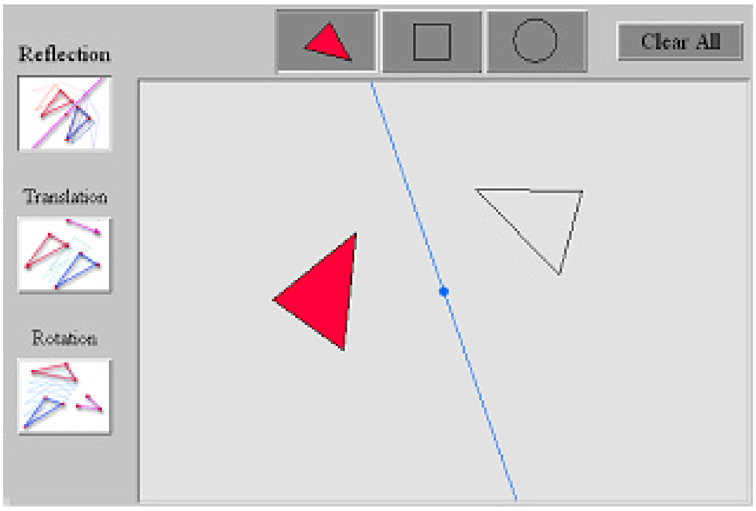
El NCTM proporciona en su página web (http://standars.nctm.org) un programa interactivo que puede ser útil para comprender las transformaciones geométricas, la congruencia, semejanza y simetría de las figuras.

Se compone de cuatro partes:

1. Visualización de transformaciones: Se puede elegir una transformación y aplicarla a una figura para observar la imagen resultante
2. Identificación de transformaciones desconocidas: Dadas una figura y su transformada se debe identificar la transformación aplicada.
3. Composición de simetrías: Se puede ver el resultado de aplicar un secuencia de simetrías de distintos ejes.
4. Composición de transformaciones: Aborda la composición de traslaciones, giros y simetrías.

Tarea 1: Visualización de movimientos

El fin de esta tarea es explorar los efectos de aplicar varias transformaciones a una figura. Se debe tratar de predecir el resultado de aplicar cada transformación.



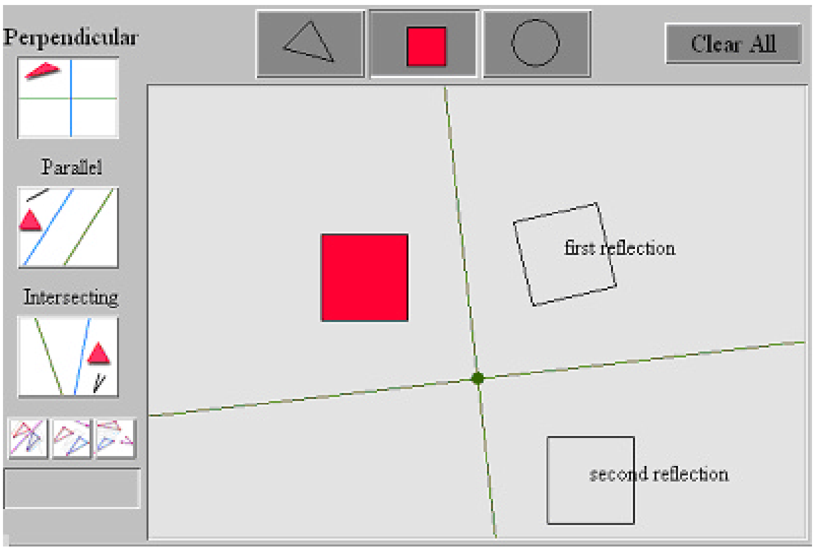
El programa permite girar la figura inicial (roja), así como el eje, y ver la figura transformada. Se puede elegir entre la simetría, la traslación o el giro.

¿Cuál es la relación entre la longitud de los lados y la medida de los ángulos de la figura inicial y la transfomada?.

Los profesores pueden preguntar a los estudiantes que describan la relación entre los ejes de simetría, los centros de rotación y las posiciones de preimágenes y las imágenes

Tarea 2: Identificación de transformaciones desconocidas

En esta tarea se debe determinar la transformación que se ha aplicado a una figura comparándola con su imagen, teniendo en cuenta las propiedades de las transformaciones. También se pueden formular y probar conjeturas haciendo uso de las opciones disponibles.



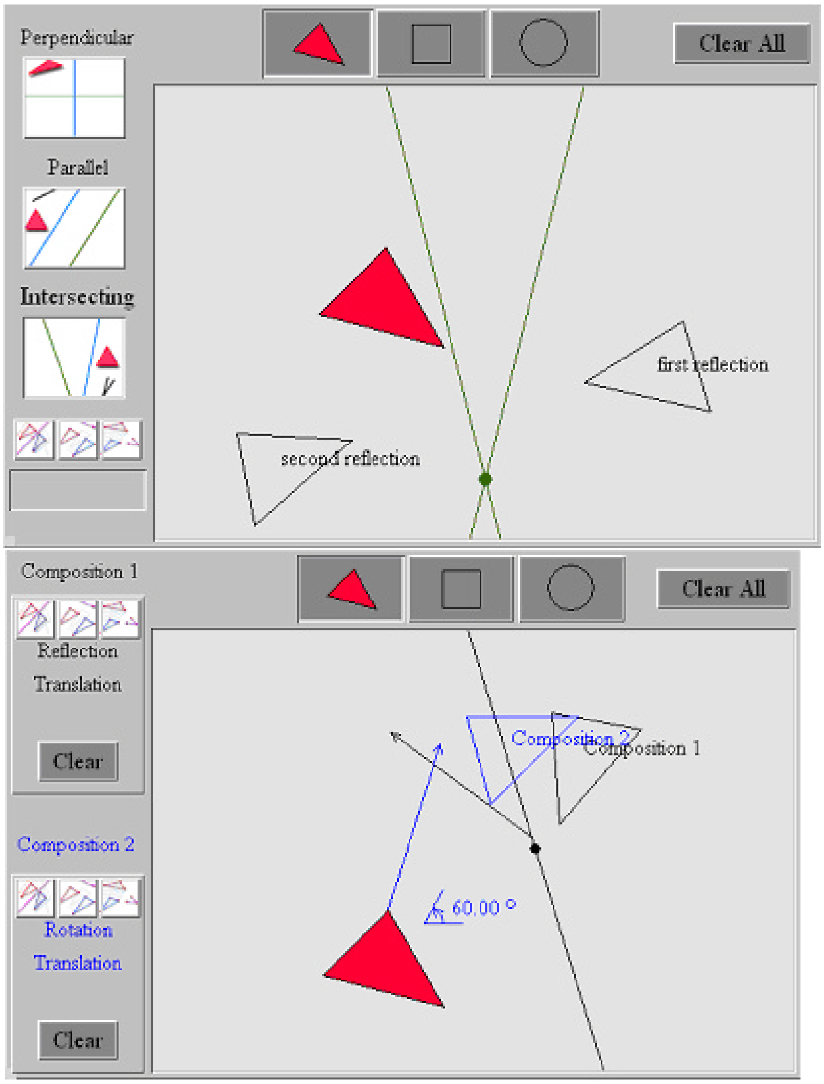
Con este software de geometría dinámica, los estudiantes pueden identificar una transformación desconocida de varias maneras: comparando la orientación de las figuras, analizando la correspondencia entre la imagen y el original o de algunos puntos sobre ellas, o también encontrando los puntos invariantes. Se pueden comprobar conjeturas construyendo la imagen de la figura original bajo la transformación que identifican.

Tarea 3: Composición de simetrías

Se trata de explorar la composición de simetrías con ejes que se cortan perpendicularmente o no y determinar qué transformación, si existe, puede producir el mismo resultado. Las figuras se pueden cambiar de posición y orientación arrastrando los vértices, viendo a continuación el efecto que se produce en las figuras transformadas.

Tarea 4: Composición de transformaciones

Consiste en aplicar sucesivamente tres transformaciones a la figura elegida. Al arrastrar los vértices de la figura inicial se puede ver de manera dinámica el resultado final. El profesor puede pedir a los alumnos que hagan conjeturas sobre qué tránsformación única, si existe, puede producir el mismo resultado que la composición.



Reflexión:

- ¿Qué propiedades de las figuras pueden observar los estudiantes usando este programa interactivo?
- Qué aspectos de la comprensión de las transformaciones geométricas por los alumnos, y de la congruencia de las figuras, se pueden ver afectados por el uso del programa.

- ¿Cuáles pueden ser las estrategias que pueden seguir los alumnos para hacer las tareas?
- ¿Cómo puede el profesor evaluar la comprensión de las transformaciones geométricas por los alumnos?

Bibliografía

Alsina, C., Pérez, R. y Ruiz, C. (1988). *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2001). Transformaciones geométricas. En, Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria (pp. 427-448)*. Madrid: Síntesis.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Ed. Labor.

Long, C. T. y DeTemple, D. W. (1996). *Mathematical reasoning for elementary teachers*. New York: Harper Collins.

Jaime, A. y Gutiérez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.

Martínez, A. M. y Juan, F. R. (Coord.) (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Longman.

Geometría y su Didáctica para Maestros

Capítulo 3:

ORIENTACIÓN ESPACIAL. SISTEMAS DE REFERENCIA

A: Contextualización Profesional

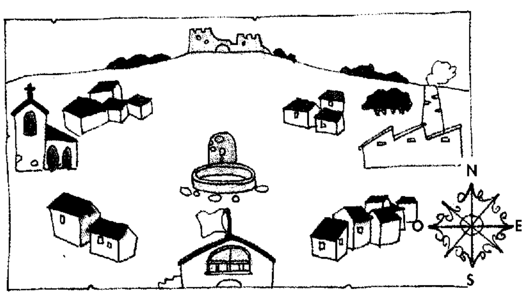
ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE ORIENTACIÓN ESPACIAL Y SISTEMAS DE REFERENCIA EN PRIMARIA

Consigna:
Los enunciados que se incluyen a continuación han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos,

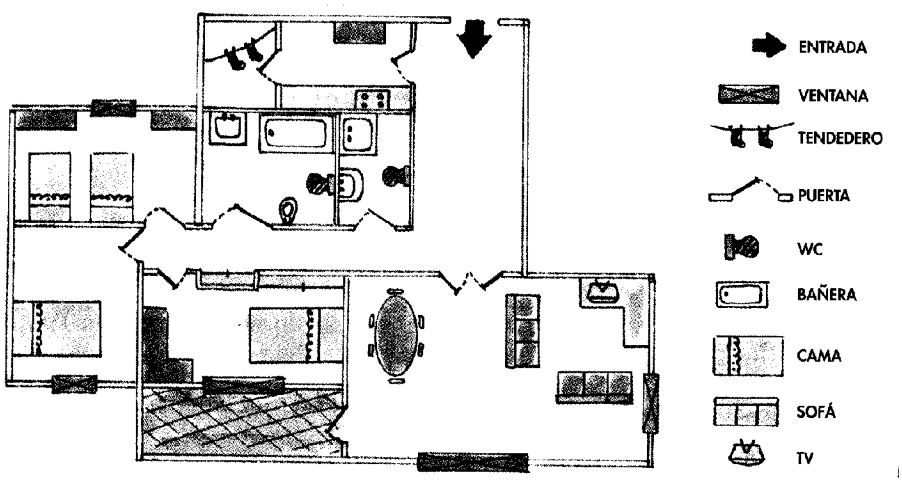
a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
f) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Copia y completa en tu cuaderno las frases siguientes:

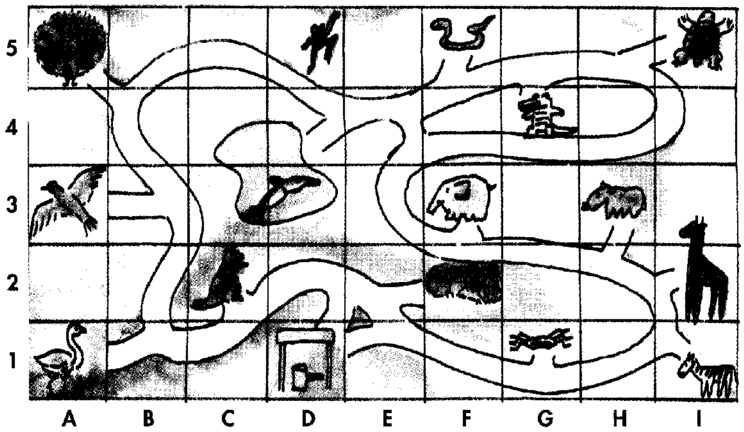
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
• La iglesia está al ..... de la fuente.
• El ayuntamiento está al .... del castillo y al .... de la fábrica.
• El castillo está al .... de la iglesia y al .... de la fábrica.
</td>
</tr>
</table>

2. Observa el plano de la vivienda de la familia de Pedro:

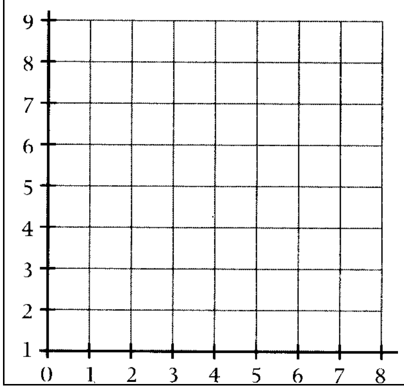
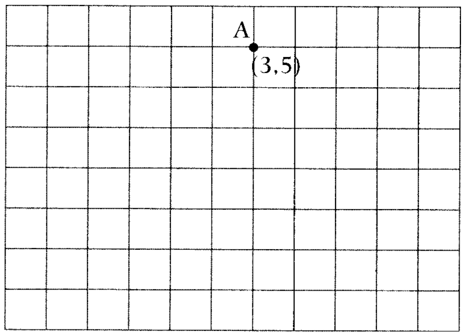


- ¿Cuántos dormitorios tiene? ¿Y camas?
- ¿Qué te encuentras nada más entrar a la derecha?
- ¿Cuántas ventanas tiene el salón?

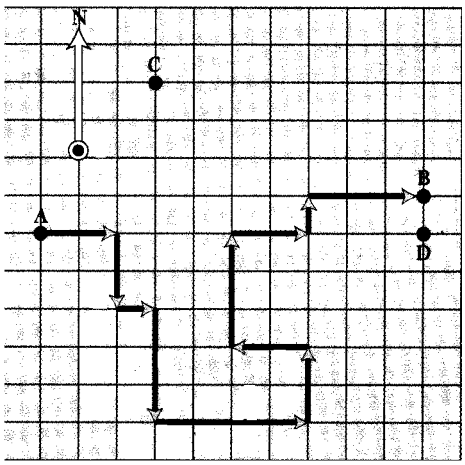
3. Abel ha ido al zoo. Al entrar le han dado un croquis con la distribución de los animales. El elefante está en la casilla (F, 3)



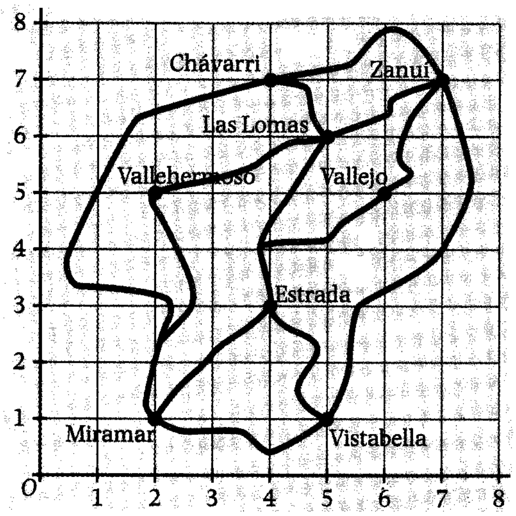
- ¿En qué casilla está el canguro?
- Indica la posición que ocupan en el plano del zoo: a) El pavo real; b) El cocodrilo; c) El león
- ¿Qué animal ocupa la casilla (A, 1); ¿Y la casilla (F, 5); ¿Y la casilla (I, 2)?

<table>
<tr>
<td>4. ¿Por qué no está bien dibujado este sistema de coordenadas?
</td>
<td>5. Dibuja los ejes de coordenadas que correspondan al punto A.
</td>
</tr>
</table>

6. Completa la ruta desde el punto A al punto B como en el ejemplo: Dos al este (2 E), dos al sur (2 S) ...

<table>
<tr>
<td></td>
<td>• Traza en tu cuaderno la siguiente ruta, desde el punto C al D: (3 S), (4 E), (6 S), (5 O), (2 S), (7 E), (3 N), (1 E), (4 N).</td>
</tr>
</table>

7. Observa el mapa:

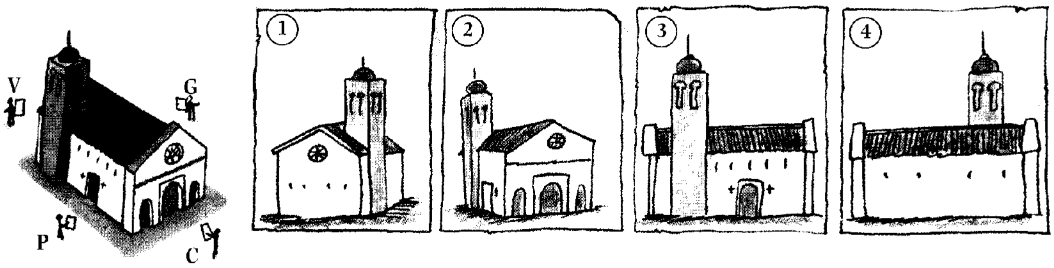


. Dibuja los croquis de itinerarios más cortos para ir desde Vallehermoso a Vistabella y desde Miramar a Zanuí.

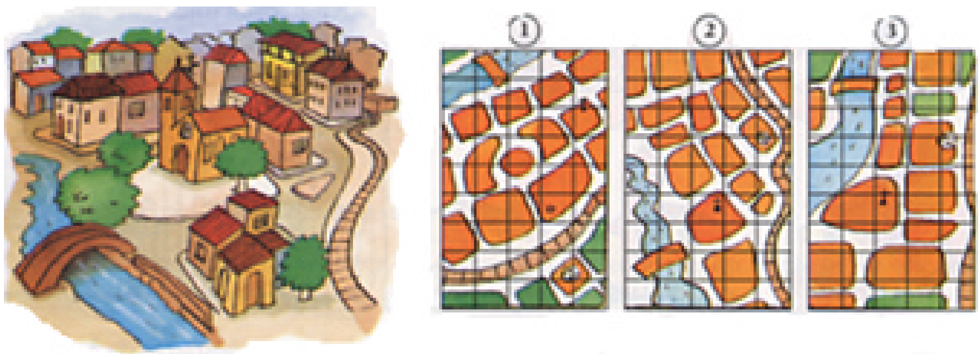
. Escribe las coordenadas de las poblaciones: Vallehermoso, Las Lomas, Estrada, Zanuí.

. Contesta:
¿Qué población está en el punto (6, 5)?
¿Y en el punto (2, 1)?

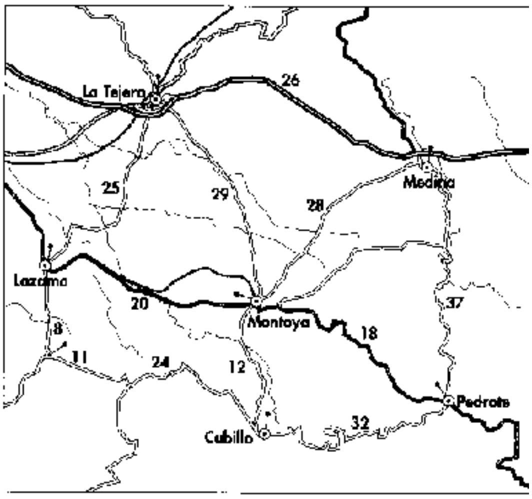
8. Victoria, Gabriel, Carmen y Pilar están dibujando la catedral, cada uno desde la posición en la que están situados. ¿Qué dibujo ha realizado cada uno?



9. Este es el dibujo de un pueblo "a vista de pájaro". ¿Cuál de estos tres planos es el correcto? Justifica tu respuesta.



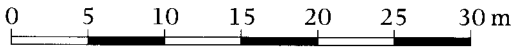
10. En general, en los mapas de carreteras, las distancias entre poblaciones se indican con números situados entre dos señales.



- Mira el mapa y di cuál es la distancia más corta por carretera entre:
  - Lazama y Medida
  - Cubillo y La Tejera

- ¿Qué itinerarios se pueden realizar para ir desde Cubillo a La Tejera?
  ¿Cuál es el más largo?
  ¿Cuántos kilómetros tiene?

11. Fíjate en esta escala gráfica y completa en tu cuaderno.



- 1 cm en el plano representa .... m la realidad
- 3 cm en el plano representan .... m la realidad
- 10 cm en el plano representan .... m en la realidad.

12. ¿Cuántos kilómetros representan 5 cm en un mapa a escala 1: 500.000? ¿Y ocho centímetros?

13. En un mapa, la distancia entre dos poblaciones es de 4 cm. Si en la realidad están separadas 40 km. ¿Cuál es la escala del mapa?

14. Las dimensiones de un campo de fútbol son 110 m de largo y 60 m de ancho. Representa este campo en tu cuaderno de tal forma que 1 cm del plano corresponda a 10 m del terreno. Calcula el área del campo en metros cuadrados y el área del plano en centímetros.

B: Conocimientos Matemáticos

1. ESPACIOS Y GEOMETRÍAS

1.1. Situación introductoria: modelizar el espacio

Un profesor ha preparado en el patio de la escuela la siguiente actividad:

En el jardín, a los bordes de dos calles convergentes (Fig. 1) hemos puesto dos banderines. Disponéis de una cinta métrica. ¿Cuál es la distancia entre los dos banderines? Podéis desplazaros y medir por cualquier sitio, salvo por el césped (espacio entre los banderines). Comprobaremos la estimación tendiendo un hilo entre los dos banderines y midiendo después el hilo.

Describir la solución del problema suponiendo

a)Que se dispone de un plano del jardín.

b)*Que no se dispone de plano.*

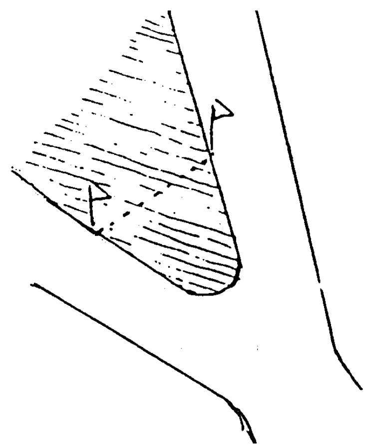


Fig. 1

1.2. Espacio sensible y espacio geométrico

En el apartado 1.1, "Naturaleza de los objetos geométricos", del Capítulo 1 de este bloque temático dedicado a la geometría hemos aclarado que los objetos de que se ocupa la geometría no pertenecen al mundo perceptible. Cuando hablamos de "figuras o formas geométricas" no nos referimos a ninguna clase de objetos perceptibles, aunque ciertamente los dibujos, imágenes y materializaciones concretas son, al menos en los primeros niveles del aprendizaje, la razón de ser del lenguaje geométrico y el apoyo intuitivo para la formulación de conjeturas sobre las relaciones entre las entidades y propiedades geométricas.

El espacio del que se ocupa la geometría debe ser distinguido del espacio de nuestras sensaciones y representaciones materiales para poder entender las diversas geometrías, su razón de ser y utilidad. El espacio euclídeo es continuo, infinito, con tres dimensiones, homogéneo e isótropo (con iguales propiedades en cualquier dirección). Por el contrario, el espacio sensible está compuesto de elementos visuales, táctiles, motores y no es homogéneo ni isótropo. Sin embargo, el dominio de este espacio sensible, es decir la posibilidad de tener un control eficaz del mismo se ve facilitado si el sujeto posee conocimientos sobre el espacio geométrico.

Cuando una persona tiene conocimientos geométricos se puede servir de ellos para razonar sobre el espacio sensible. "Cuando un topógrafo quiere estimar el área de un terreno, no puede pensar en medirlo directamente, es decir, contar el número de unidades cuadradas que contiene. De hecho, el único método usable consiste en operar indirectamente, medir, no áreas, sino longitudes y ángulos y deducir el valor del área gracias a los teoremas y fórmulas obtenidas por métodos deductivos en Geometría y Trigonometría".[1] Para medir la distancia entre los banderines de la situación introductoria que hemos propuesto tenemos que hacerlo usando conocimientos geométricos sobre la representación del espacio sensible mediante figuras y relaciones geométricas. La realización efectiva de las medidas requiere la aplicación de conocimientos sobre el espacio sensible: Si no disponemos de un instrumento de medida de longitudes suficientemente largo tendremos que controlar la alineación de las sucesivas extremidades en la aplicación sucesiva de la cinta métrica. En cada instante el topógrafo recurre a conocimientos relativos al control del espacio sensible y los instrumentos materiales y al modelo geométrico.

Un punto conflictivo de la enseñanza de la geometría es sin duda el de la articulación entre el dominio del espacio sensible y del espacio geométrico. En el espacio sensible el alumno controla sus relaciones efectivas de manera continua con la ayuda de los sentidos. En el trabajo con la geometría, el alumno también entra en relación con objetos del espacio sensible, las figuras (en el sentido de dibujos o trazos). Estas figuras no son representaciones "imperfectas" de unas "verdaderas" figuras geométricas. El alumno debe abandonar el control empírico de sus afirmaciones y pasar a un control por medio de razonamientos. No se trata por tanto solo de cambiar de cuadro, de pasar de un mundo "imperfecto" a un mundo "perfecto", mediante una especie de paso al límite. Se trata de cambiar radicalmente la manera de controlar sus relaciones con el espacio[2]. Sin embargo, no se trata sencillamente de que el sujeto abandone el mundo perceptible y pase a un mundo intelectual, porque este nuevo mundo no es otra cosa que el mundo de las reglas y convenios que nos imponemos para organizar y controlar el mundo sensible. "Se trata de pasar de las relaciones efectivas y contingentes con un cierto espacio a la modelización de las relaciones con este espacio".

Estas reflexiones muestran que para progresar en la comprensión de las dificultades de la enseñanza de la geometría, enseñanza que hace intervenir necesariamente a la vez el modelo geométrico y la realidad física que modeliza, es necesario ir más allá de la simple consideración del tipo de espacio en el que se quiere colocar al sujeto, y estudiar las relaciones establecidas entre el sujeto de una parte y cada uno de los espacios por otra.

1.3. Diversos tipos de geometrías

En los capítulos anteriores hemos estudiado las figuras geométricas y un tipo de transformaciones que se pueden aplicar a las figuras: las isometrías (traslaciones, giros y simetrías). Estas transformaciones conservan las distancias y los ángulos de las figuras a las que se aplican y su estudio constituye lo que se denomina la *geometría euclídea*.

En el 2º capítulo hemos incluido también un tipo de transformaciones que no conservan la distancia, como son las homotecias (dilataciones o contracciones). Estas transformaciones conservan la forma de las figuras, y por tanto, los ángulos y la proporción entre los elementos correspondientes; su estudio constituye la denominada *geometría de la semejanza*.

---

[1] Frechet (1955), citado por Berthelot y Salin (1992, p. 28)

[2] Berthelot, R. y Salin, M. H. (1992). L'enseignement de l'espace et de la geométríe dans la scolarité obligatoire. Tesis Doctoral. Universidad de Burdeos. (p. 32).

Mencionamos, a continuación, brevemente otros tipos de geometrías indicando los tipos de transformaciones y propiedades invariantes que las caracterizan.

La *geometría afín* estudia las transformaciones denominadas proyecciones afines, que de manera intuitiva se refieren a las transformaciones inducidas en las figuras al ser proyectas mediante haces de rayos paralelos. En este caso las propiedades que se conservan son el paralelismo de rectas o segmentos, el punto medio de segmentos y la razón de la distancia entre puntos sobre una misma recta (proyecciones paralelas estudiadas en la sección dedicada al teorema de Thales).

La *geometría proyectiva* estudia las propiedades de las figuras que se conservan al ser transformadas mediante una proyección desde un punto. Como ejemplo de tales propiedades está la colinealidad (puntos que están alineados, continúan estando alineados tras la transformación) y la convexidad de las figuras.

1.4. Topología

Es posible aplicar otro tipo de transformaciones a las figuras y cuerpos geométricos distinto de los indicados hasta ahora que da lugar a una rama de las matemáticas que es la Topología. Estas transformaciones son las deformaciones, estiramientos y contracciones sin "rotura" de las figuras, como si estuvieran dibujadas sobre una lámina de goma, y ésta se estirase o encogiese. Reciben el nombre de *transformaciones topológicas* y como propiedades invariantes tenemos, la continuidad, las intersecciones, el orden, el interior y exterior, la frontera. En la construcción de esquemas y croquis espaciales se ponen en juego propiedades topológicas del espacio.

En Topología no interesan distancias, ángulos ni áreas. En términos de geometría euclídea el círculo, cuadrado y triángulo mostrados en la figura 2 son completamente diferentes. Sin embargo, tienen una propiedad común: cada una de esas figuras posee un interior y un exterior; para ir desde un punto exterior a otro interior es preciso cruzar el contorno: se trata de *curvas cerradas simples*.

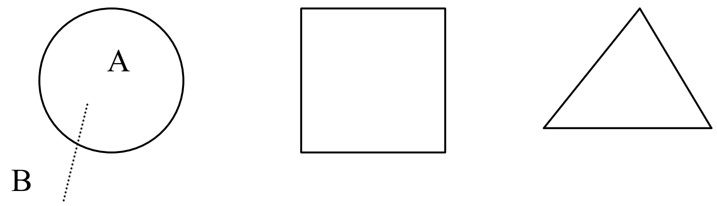


Fig. 2

Si estas figuras se dibujaran sobre una lámina de goma, estirándola se deformarían perdiendo las propiedades que las definen como circunferencia, cuadrado y triángulo, pero conservarían la propiedad de ser curvas cerradas simples. No está permitido, sin embargo plegar, cortar o agujerear ya que en este caso esa propiedad también se perdería.

Un problema célebre de naturaleza topológica es el denominado de los Siete Puentes de Königsberg. Esta ciudad está situada cerca de la desembocadura de un río y parte de ella está construida sobre una isla (Fig. 3). Esta isla y el resto de la ciudad están unidos por siete puentes. El problema propuesto consistía en ver si era posible ir a pasear y volver al punto de partida habiendo cruzado todos y cada uno de los puentes una sola vez. En 1736 el matemático suizo Euler estudió esta cuestión. Descubrió que este problema topológico se conserva en lo esencial si se reemplaza el mapa de la figura 3a por el diagrama más simple o "red" de la figura 3b.

Fig.3a

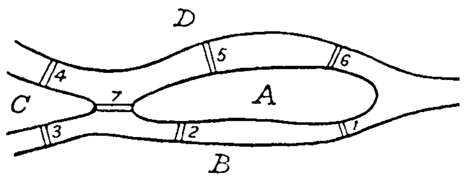
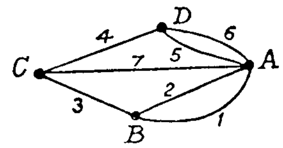


Fig. 3b

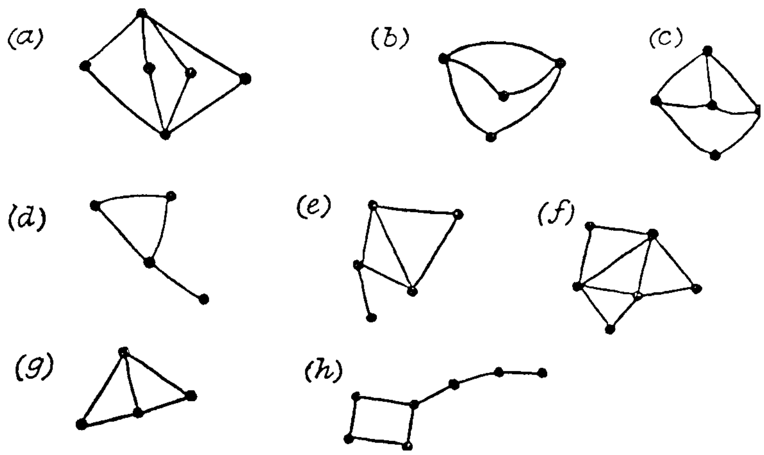


El problema inicial equivale a preguntar si es posible partir de uno de los puntos señalados ("vértices") de la red, recorrer ésta con un lápiz, sin levantarlo del papel, siguiendo cada línea una vez y sola una, y volver al punto de partida

Ejercicios:

1. Estudia el problema de los puentes de Königsberg

2. Ver si es posible recorrer análogamente las siguientes redes (empezando en uno de los vértices a tu elección, recorriendo cada línea una vez y sólo una, y volviendo al punto de partida).

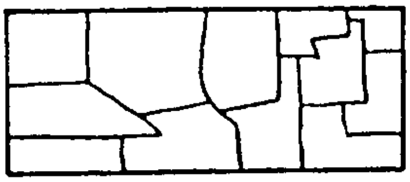


3. Experimenta con otras redes. Si en un vértice se cortan un número par de segmentos se llama vértice par; si es un número impar de líneas el que concurre, se llama vértice impar. Trata de hallar alguna regla para decidir si uno de los caminos de "pasar sólo una vez" es posible o no. Puede servir de ayuda marcar el número de vértices impares de cada red. [Solución, este número debe ser 0 o 2]

Otro problema topológico célebre referido a superficies es el de coloración de mapas. El problema es hallar el menor número de colores necesarios para colorear cualquier mapa que represente varios países, con la condición de que países vecinos (o sea, los que comparten una frontera) deben llevar colores diferentes. Recientemente se ha demostrado que cuatro colores son suficientes para colorear un mapa.

Ejercicio:

4. Trata de dibujar mapas como el de abajo, usando cuatro colores para aplicarlos a los diferentes países.



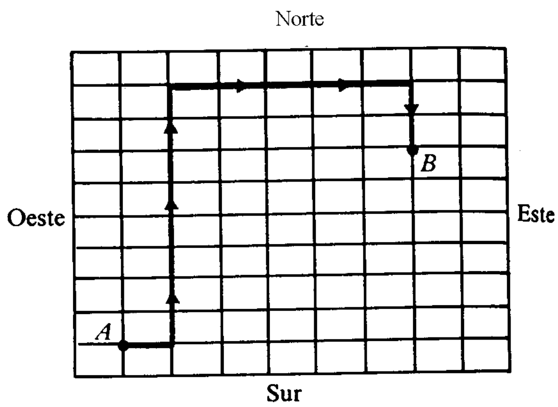
2. LOCALIZACIÓN Y RELACIONES ESPACIALES

Con frecuencia el estudio de la geometría elemental se centra en las formas y figuras geométricas. Sin embargo, una parte relevante de la geometría se ocupa de la posición y el movimiento en el espacio. ¿En qué lugar estás? ¿Estás delante o detrás de la mesa? ¿Estás entre el sofá y la mesa? ¿Dónde estarás si avanzas cinco pasos? ¿Dónde estarás si avanzas cinco pasos y después retrocedes tres pasos? La reflexión sobre las localizaciones y movimientos nos proporciona una manera de describir el mundo y poner un cierto orden en el entorno. También proporciona una oportunidad de construir conceptos matemáticos como los números positivos y negativos (hacia delante y atrás) y destrezas que se relacionan con otros temas, como la realización e interpretación de planos y mapas. Estas experiencias sirven de base para introducir los sistemas de coordenadas.

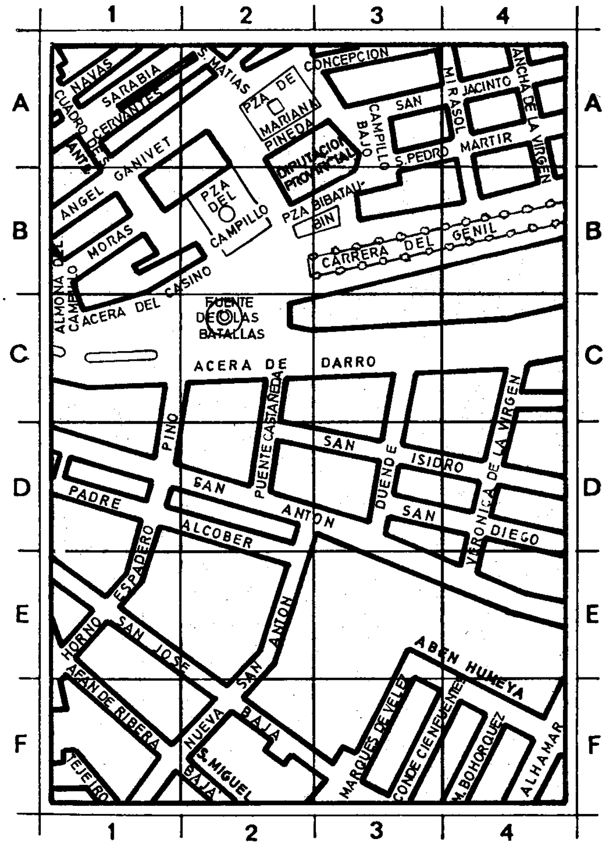
Existen diversos sistemas de coordenadas que permiten representar puntos en un espacio de dos o tres dimensiones. René Descartes (1596-1650) introdujo el sistema de coordenadas bien conocido basado en el par de ejes ortogonales que definen un origen y un segmento unidad para medir distancias sobre los ejes. Es el conocido como sistema de coordenadas cartesianas. Un sistema similar, aunque basado sobre ángulos medidos a partir de una línea base es el sistema de coordenadas polares.

2.1. Localización de puntos: Sistema de coordenadas cartesianas

¿Cómo puede decirse a una persona que vaya de una parte de una ciudad a otra?. Una manera puede ser indicando que recorra cierta distancia en una dirección y luego otra distancia en otra dirección. Por ejemplo, para dar direcciones de manera que se pueda ir del punto A al punto B de la cuadrícula de la derecha, podría decirse: “Ir una calle al este, ocho al norte, cinco al este y dos al sur”. Otra manera más sencilla puede ser decir, “Ir seis calles al este y cinco al norte”.



En matemáticas se emplean dos rectas perpendiculares numeradas para elaborar un método de localización de puntos en el plano. El punto de intersección de las rectas se llama *origen*. Un par de números llamados coordenadas indican la ubicación de cada punto. En general, un punto se representa por un par ordenado de puntos, las coordenadas (x, y). La notación P(x,y) se usa para referirse a un punto cualquiera, *x* es la abscisa del punto e *y* la ordenada. Este método de determinación de puntos se llama sistema de coordenadas cartesianas. Una variante de sistema de referencia de puntos y regiones en el plano es el usado en los planos y mapas, combinando el uso de números para las abscisas y letras para ordenadas o viceversa, como se muestra en este plano.



Ejercicios:

5. Dos vértices de una figura son (0,0) y (6,0).

a) ¿Cuáles son las coordenadas del tercer vértice si la figura es un triángulo equilátero?

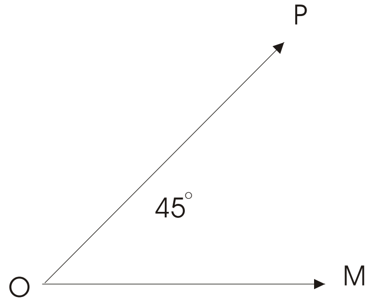
b) ¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices si la figura es un cuadrado?

c) ¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices si la figura es un paralelogramo de altura 4?

6. Considérese un sistema tridimensional de coordenadas, con los ejes x, y, z. Se sitúa un cubo de aristas 4 unidades sobre los ejes y un vértice en el origen. ¿Cuáles son las coordenadas (x, y, z) del centro del cubo?

2.2. Sistema de coordenadas polares

Además del uso de las coordenadas cartesianas, hay otra forma de encontrar puntos en un plano. Por ejemplo, si estamos en el punto O orientados hacia M, para localizar el punto P podría decirse, "girar 45º y avanzar 4 unidades". La notación usada para esta manera de localizar un punto en el plano es también mediante un par de números (r, θ); el primero indica la distancia que hay que avanzar y el segundo el giro que se debe dar para llegar al punto deseado.

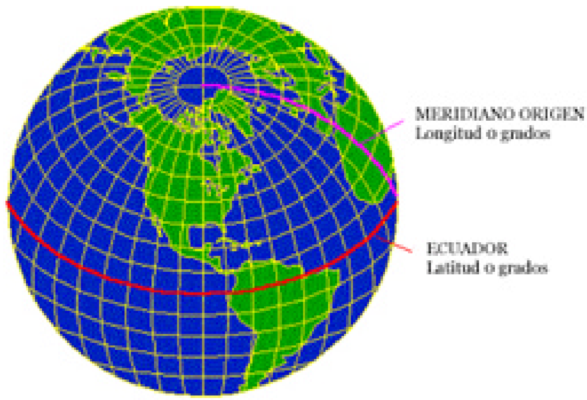


Ejercicio

7. Considérese un sistema de coordenadas tridimensionales con los ejes x, y, z. En él se coloca un cubo cuyas aristas están sobre los ejes y un vértice en el origen. Encontrar la fórmula que permite calcular la longitud de la diagonal del cubo en función de las coordenadas del vértice opuesto al origen.

2.3. Sistemas globales de coordenadas para el posicionamiento de puntos sobre la superficie de la tierra

El sistema de coordenadas más usado en la actualidad es la latitud, longitud y altura. El meridiano origen (Greenwich) y el Ecuador son los planos de referencia usados para definir la latitud y la longitud.



La *longitud geodésica* de un punto es el ángulo que forma con el plano del ecuador la recta que pasa por dicho punto y es normal al elipsoide de referencia.

La *longitud geodesia* de un punto es el ángulo entre un plano de referencia y el plano que pasa por dicho punto, siendo ambos planos perpendiculares al plano del ecuador.

La *altura geodésica* de un punto es la distancia desde el elipsoide de referencia al punto en la dirección normal al elipsoide.

3. MAPAS Y PLANOS TOPOGRÁFICOS

3.1. Utilidad práctica de los mapas y planos

Imagina que te has perdido en un bosque. ¿Qué necesitarías para resolver ese problema?. Con la ayuda de un mapa y de una brújula podrías hacerlo. Si no tuvieras una brújula, pero sí un mapa, podrías orientarte conociendo la posición del Sol o de las estrellas. Sin embargo, si te falta el mapa, sería muy difícil decidir hacia dónde tienes que dirigirte.

A la humanidad le ha tomado muchísimos años representar la superficie de la Tierra. A medida que se han explorado nuevos territorios, se han ido dibujando de diferentes maneras. Cuando ha sido necesario indicar un lago, el contorno de una costa, o cuando se ha querido señalar algún lugar importante, se han trazado croquis, planos o mapas.

Un *mapa* es una representación de la Tierra, o de una parte de ella, generalmente hecha sobre una hoja de papel. Cuando la superficie que se representa es pequeña y no se trata de un continente, de un país o de un estado, sino de una ciudad o parte de ella, lo que se dibuja no es un mapa, sino un plano.

Un *mapa topográfico* es aquel en el que además de estar dibujadas las posiciones relativas de los objetos está representado el desnivel en altura. Estos desniveles se representan dibujando unas líneas llamadas curvas de nivel o isohipsas. Las curvas de nivel unen todos los puntos que están a la misma altura sobre el nivel del mar. Cuando las curvas de nivel están por debajo de la superficie marina se llaman isobatas. En el caso de España el nivel del mar se mide en Alicante.

La cartografía es la ciencia relacionada con la elaboración e interpretación de mapas. Los recursos empleados en la confección de mapas son objeto de interés para la Cartografía; desde el conocimiento astronómico y matemático hasta el uso o las aplicaciones cromáticas de la impresión y los programas informáticos utilizados para el tratamiento espacial. Todo ello es parte de la Cartografía.

A lo largo de la historia se han elaborado muchos mapas. Al principio, se hicieron en tabletas de barro cocido, en pergaminos o sobre planchas de metal. Hubo algunos bellísimos, decorados por verdaderos artistas, pero realizados con más imaginación que realidad. En muchos mapas se observaban los nombres de países fantásticos habitados por seres quiméricos. Los cartógrafos que los dibujaban estaban influidos por relatos fantásticos y leyendas. Muchos de ellos señalaban la situación geográfica de la Atlántida, fabuloso continente que se creía sepultado en el océano.

Los mejores mapas fueron los que representaban las costas. Antes de conocer la brújula, los navegantes casi no se aventuraron a perder de vista la tierra por temor a extraviarse en el mar. Se guiaban por el Sol y las estrellas, pero como los instrumentos de observación que tenían eran deficientes y no permitían calcular las distancias con exactitud, los mapas no podían ser precisos. Con el uso de la brújula se abrió una nueva era en la exploración de los mares y se hizo posible la navegación trasatlántica. Así, se conocieron nuevos territorios y fue posible elaborar mapas que representaban mayores extensiones del planeta.

Cuando se demostró que la Tierra era redonda, los cartógrafos se enfrentaron a un gran problema: ¿cómo representar la redondez del planeta en una hoja de papel?. Para comprender mejor este conflicto, imagínate lo siguiente; si tomas una hoja de papel y tratas de cubrir la superficie de una pelota, verás que es imposible hacerlo sin arrugar el papel. Algo parecido sucede con los mapas: es difícil representar la Tierra sin deformaciones en una superficie plana.

3.2. Bases para la realización de los mapas: triangulación y proyección

La realización de un mapa de la Tierra requiere proyectar una superficie esférica sobre un plano, dibujar el relieve y demás características del terreno. Se trata de representar un espacio de tres dimensiones en otro de dos, lo que se consigue mediante procedimientos de triangulación del territorio a cartografiar. La red de triangulación está formada por un conjunto de señales construidas sobre el terreno, a fin de determinar sobre él los vértices de posición. La red geodésica española está formada por tres redes o triangulaciones constituidas por vértices colocados a tres tipos de distancias. La red de primer orden consta de 10 cadenas de triángulos de 50 kms de lado orientadas según el sentido de los paralelos y meridianos. Su base se midió en 1858 en la localidad de Madridejos (Toledo). Los 285 vértices de esta red se apoyan en las cumbres más elevadas de las cadenas montañosas. Esta red de primer orden se complementa con otras que cubre los 19 cuadriláteros formados por las intersecciones de las cadenas principales. Los 288 vértices de las redes están unidos por triángulos de 30 kms de lado. La red de segundo orden, que se apoya en la anterior, tiene 2.150 vértices, y sus triángulos están formados por lados de 20 kms. La red de tercer orden tiene 8.000 vértices y el lado de los triángulos mide de 5 a 10 kms. Por último, hay 9.000 vértices auxiliares a diferentes distancias.

La proyección utilizada para el Mapa Topográfico Nacional (MTN) ha variado desde su inicio en 1858. Primero se utilizó la proyección poliédrica. Cada cara del poliedro es tangente en el centro a la superficie esférica. Actualmente se utiliza la proyección denominada UTM (Universal Transversal Mercator), en la que un cilindro es tangente al elipsoide a lo largo de un meridiano y el eje del cilindro está contenido en el plano del Ecuador. Los husos considerados miden 6º. España está entre los husos 29-30 y 31.

A esta base geodésica de proyección ha de unirse otra serie de trabajos que permitan la medida del relieve y su representación, que son los trabajos topográficos. Para el MTN se comenzó haciendo levantamientos topográficos de forma tradicional tomando como base los términos municipales. La información obtenida se pasaba a borradores a escala 1:25.000. Desde 1956 se utiliza la fotografía aérea. Actualmente la cartografía automática por medio de ordenador supone un progreso decisivo en la confección de las hojas topográficas.

3.3. La red de coordenadas geográficas

La red de coordenadas nos permite la localización exacta de todos los puntos representados en el mapa. Esta red de coordenadas está formada por los paralelos y meridianos.

Longitudes:

Una hoja del MTN está limitada por dos arcos de meridiano entre los que existe una separación de veinte minutos (20') de paralelo. A partir de 1970 se tomó como meridiano origen el de Greenwich. Hasta entonces se tomada el origen en el meridiano que pasaba por el Observatorio Astronómico de Madrid. Al N y S de la hoja aparece la medida de la longitud de minuto a minuto, cada uno de los cuales está dividido en seis partes iguales que representan diez segundos (10") cada una.

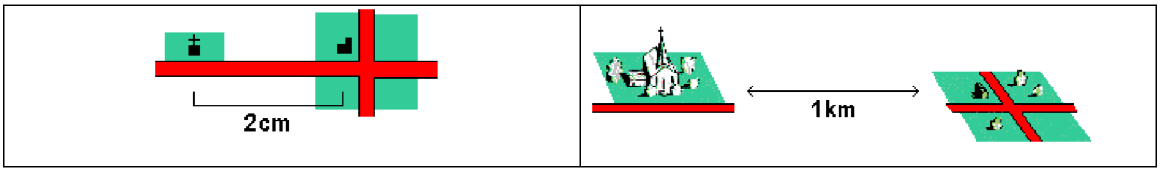
Latitudes:

Una hoja está limitada por dos arcos de paralelo entre los que existe una separación de 10' de meridiano. Todas las hojas del MTN de España tienen latitud Norte (ya que el Ecuador es el origen de las latitudes). Los bordes E y W de las hojas llevan las medidas de la latitud en grados y minutos. Cada minuto aparece dividido en seis unidades de diez segundos (10") cada una.

La localización de cualquier punto de la hoja se puede hacer con exactitud, trazando con una regla una recta hacia su borde N o S y E o W más p´roximo y leyendo su longitud y latitud en los mismos.

3.4. Las escalas

La escala de un mapa o de un plano indica la razón existente entre la medida de las distancias en él representadas y las distancias reales sobre el terreno. Por ejemplo, si 2 cm sobre el mapa representa 1 km sobre el terreno, la escala será 2 cm = 1 km, lo que se expresa habitualmente en forma de razón:



$$\frac{\text{Distancia sobre el mapa}}{\text{Distancia sobre el terreno}} = \frac{2\text{cm}}{1\text{ km}} = \frac{2\text{ cm}}{100.000\text{ cm}} = \frac{1}{50.000}$$

La escala puede expresarse por palabras, por ejemplo, 1 cm por 1 km, por números, ya sea en forma de fracción cuyo numerador es siempre la unidad, por ejemplo1/50.000, en forma de división indicada 1:50.000, o bien gráficamente,

Si la escala viene dada de forma gráfica puede utilizarse para medir directamente las distancias en el mapa y leerlas en distancia real.

Las diferentes escalas nos permiten estudiar fenómenos diferentes. A escala de 1:1 000 y 1:5 000 se pueden estudiar fenómenos de mucho detalle. Se puede dibujar una casa. Se llaman específicamente planos, y es que a una escala tan grande no es necesaria una proyección y se puede considerar la Tierra plana. Con escalas entre 1:5 000 y 1:20 000 podemos representar planos callejeros de ciudades. Entre 1:20 000 y 1:50 000 podemos estudiar comarcas y municipios. Entre el 1:50 000 y el 1:200 000 podemos estudiar provincias y regiones, y las carreteras. Entre 1:200 000 y 1:1 000 000 podemos ver las comunidades autónomas y los países. A escalas inferiores a 1:1 000 000 podemos ver continentes y hasta el mundo entero.

El mapa que mejor permite el análisis geográfico es el de escala 1:50 000, mapas más pequeños permiten una visión de conjunto, y los más grandes un mayor detalle. A esta escala está representado el Mapa Topográfico Nacional.

Ejercicios

8. La superficie de una explotación agraria de forma rectangular es de 80 cm2 en un mapa de escala 1:50.000. ¿Cuál es la superficie real en hectáreas.

9. ¿Qué superficie ocupará en un mapa a escala 1:50.000 una superficie real de 26 hectáreas.

3.5. Representación cartográfica: altimetría y planimetría

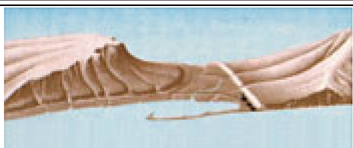
La representación del relieve del terreno es una característica de mucha importancia en los mapas topográficos. En los mapas más antiguos sólo se indicaba la posición de las montañas, a la que se añadía algunos símbolos que daban idea de su altitud; el más utilizado fue el de los perfiles abatidos. Este método consiste en el dibujo del perfil de las montañas abatido sobre el plano horizontal. Mapas babilónicos, egipcios y romanos tienen ya este sistema de representación y continúa utilizándose, con algunos retoques de perfeccionamiento hasta el siglo XVIII. Posteriormente, a finales de dicho siglo, tras la aparición del barómetro y el perfeccionamiento de los teodolitos, fue posible la determinación de las cotas, y la calidad de la representación del relieve mejoró con ello. Otros métodos para representar el relieve han sido utilizados hasta generalizarse en el siglo pasado el uso de las *curvas de nivel* o isohipsas.

Una curva de nivel o isohipsa es una línea imaginaria que une los puntos de un relieve situados a la misma altura sobre el nivel del mar. También se puede describir como el trazo de una línea de un plano horizontal que corta las superficies inclinadas constituidas por las pendientes de un relieve.

Dentro de un mismo mapa las curvas de nivel son equidistantes, esto es, la distancia vertical que separa dos curvas consecutivas es constante. Esto es imprescindible puesto que de otra forma no representarían fielmente las pendientes del terreno. Esta equidistancia está en función de la escala. Un mapa a escala 1:20.000 puede tener una equidistancia entre las curvas de nivel de 5 o 10 m. En el Mapa Topográfico Nacional a escala 1:50.000 la equidistancia es de 20 m.

En los mapas actuales, las curvas de nivel suelen estar numeradas, al menos las curvas maestras, indicando la altitud absoluta. También algunas cimas o crestas llevan indicada su altura absoluta para que se aprecie mejor los desniveles del relieve.

Las curvas de nivel permiten medir las alturas de las montañas, las profundidades de los fondos marinos y la inclinación de las laderas.



El relieve del terreno se muestra con las curvas de nivel

Además del relieve los mapas llevan impresas una serie de signos convencionales que representan otros tantos hechos o aspectos de la realidad. Estos signos convencionales podemos dividirlos en dos grandes grupos:

1. Indicadores de aspectos naturales (ríos, barrancos, arroyos, lagunas, vegetación, ...)
2. Indicadores de aspectos no naturales, es decir, relativos a la ocupación del medio por el hombre. Estos a su vez se pueden dividir en dos subgrupos:
    - aspectos que no se dan en la realidad (como los límites administrativos)
    - aspectos que aparecen en la realidad y se deben a la acción del hombre (caminos, carreteras, líneas de ferrocarril, casas, pueblos, cultivos, usos del suelo, etc.)

El cálculo de la pendiente

La pendiente es la relación que existe entre el desnivel que debemos superar y la distancia en horizontal que debemos recorrer. La distancia horizontal se mide en el mapa. La pendiente se expresa en tantos por ciento, o en grados.

Para calcular una pendiente en tantos por ciento basta con resolver la siguiente regla de tres: Distancia en horizontal es a 100 como distancia en vertical es a X

Distancia en vertical · 100/Distancia en horizontal = Pendiente%

Para calcular la pendiente en grados basta hallar la tangente del ángulo conocidos los dos catetos:

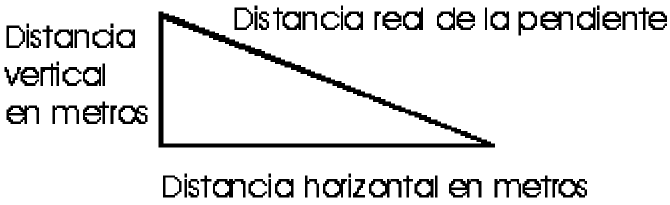
Tangente A = Altura/Distancia

Un ángulo de 45º es una pendiente del 100% ya que cada 100 metros en horizontal se recorren 100 metros en altura.

Cuando medimos una distancia en el mapa lo hacemos sobre una superficie plana. La que medimos en el mapa se llama distancia planimétrica, que no es otra cosa que la proyección en el mapa de la distancia real. La distancia planimétrica coincide con la real sólo si en la realidad hay una llanura, pero si hay una pendiente la diferencia entre la distancia real y la planimétrica puede ser notable.

Para calcular la distancia real debemos hallar el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. El valor de un cateto es la distancia en metros entre dos puntos, el valor del otro cateto es el valor en metros de la diferencia en altitud entre los dos puntos. La distancia real es pues:

$$r^2 = h^2 + a^2$$



Donde:
r = distancia real

h = distancia horizontal en la realidad entre los dos puntos
a = diferencia de altura en la realidad entre dos puntos

Para medir la distancia entre dos puntos en línea recta basta con usar una regla, en un plano pocos trazados son rectos. Para medir trazados sinuosos entre dos puntos se pueden usar dos métodos, uno rudimentario, que consiste en colocar un hilo sobre el recorrido y luego medir la longitud del hilo, el otro es usando un instrumento creado al para esto llamado curvímetro.

El corte topográfico

El corte topográfico sirve para hacerse una idea de cómo es el relieve que está dibujado en el mapa. Para levantarlo debemos partir de la información que nos proporciona el mapa, es decir, las curvas de nivel, la distancia horizontal entre dos puntos y la escala.

Para hacer un corte topográfico debemos seleccionar dos puntos del mapa. Trazar una línea recta entre ambos. Luego sobre un papel colocado encima de la línea marcamos todas las curvas de nivel que nos encontremos. Si las curva de nivel están muy juntas basta con que marquemos las curvas maestras. Con esta información nos vamos al papel.

Dibujamos un eje de coordenadas.

El eje horizontal (abscisas) tendrá la misma escala que el mapa. Si se quiere variar habrá que hacer los cálculos oportunos. Sobre esa línea trasladamos las distancias entre las curvas de nivel que tenemos en la hoja.

El eje vertical (ordenadas) tendrá una escala diferente. Lo normal, para poder ver cómodamente el relieve es que esté en la escala 1:10 000, pero podemos elegir cualquiera. Es decir, cada centímetro en el papel serán 100 metros en la realidad.

A continuación levantamos cada punto del eje de abscisas en vertical hasta alcanzar la altitud correspondiente en el eje de ordenadas. Y lo marcamos. Cuando lo hayamos hecho unimos todos los puntos y tendremos un perfil del relieve en línea recta entre los puntos seleccionados.

Para completar el corte debemos poner como mínimo: la hoja en el que se encuentra la zona seleccionada, el nombre de los puntos de los extremos del corte, y si es posible el nombre de las cotas, los ríos y los pueblos por donde pasa, la escala que hemos empleado y el rumbo del corte.

Se pueden hacer también cortes que nos den la imagen del perfil de un trayecto sinuoso. Para ello debemos tomar la distancia entre las curvas de nivel que vayamos atravesando, para poder marcarlas sobre el eje de abscisas. Los cortes sinuosos más habituales son los del trayecto de una carretera (famosos por las vueltas ciclistas) y el perfil de un río, que es siempre descendente.

Si en lugar de hacer un solo corte hacemos varios paralelos y resaltamos las líneas que sobresalen tendremos un corte compuesto, que nos da una idea del aspecto del paisaje.

3.6. El rumbo y la orientación del mapa

Ningún mapa sirve para nada si no podemos identificar el lugar donde nos encontramos dentro de él. Pero una vez situados debemos orientar el mapa, para que las direcciones que se marcan en él sean las mismas que en la realidad. Esto vale tanto para un mapa topográfico como para un plano callejero o un mapa de carreteras.

Para situarnos dentro de un mapa debemos estar en un lugar conocido, en la intersección de dos líneas del mapa que sabemos a qué corresponden en la realidad. Por ejemplo dos calles.

Para orientar un mapa podemos usar dos procedimientos. El primero es colocar el plano paralelo a esas líneas que hemos reconocido. Este método es suficiente en la mayoría de los casos. Se usa mucho para orientar planos callejeros. Una vez orientado podemos saber la dirección que debemos tomar, el rumbo, con sólo saber a qué punto del mapa queremos llegar. El rumbo que marque el mapa es el mismo que debemos tomar en la realidad.

No obstante, en ocasiones no disponemos de esas ayudas, por ejemplo si estamos en una habitación cerrada, y para orientar el mapa necesitamos de la brújula. En una brújula debemos distinguir dos partes importantes: la aguja magnética, que siempre señala al norte magnético, y el limbo que es la rueda donde están marcados los grados de la circunferencia, y el norte.

En todo mapa, a no ser que se diga lo contrario, el norte está en la parte superior de la hoja, el sur en la inferior, el este a la derecha y el oeste a la izquierda. En los mapas en los que esto no es así aparece una rosa de los vientos indicando cual es la dirección del Norte. Para orientar el mapa colocamos la brújula paralelamente a los meridianos, o el borde derecho o izquierdo de la hoja si no hay dibujados meridianos. Entonces giramos la hoja hasta que el limbo de la brújula coincida con la dirección que marca la aguja. En ese momento tenemos el mapa orientado.

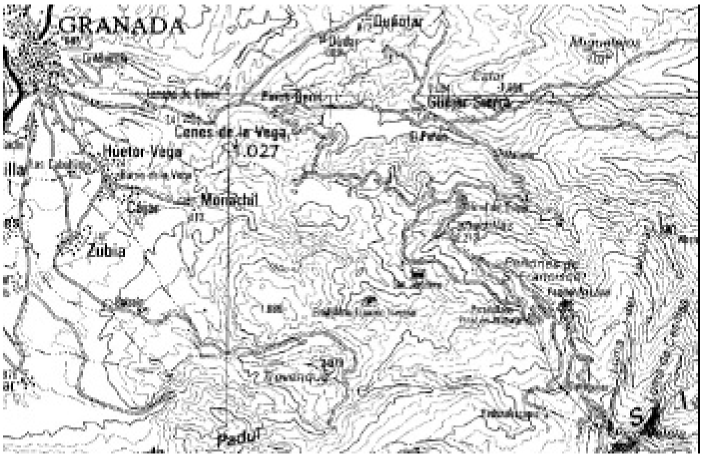
El rumbo es la dirección en línea recta, medida en grados de circunferencia, entre dos puntos. En un mapa para conocer los grados del rumbo entre dos puntos basta con usar un transportador de ángulos. En la realidad ese transportador de ángulos es la brújula. Se comienza a contar desde el Norte y en sentido de las agujas del reloj. Distinguimos tres tipos de norte, el norte geográfico o verdadero, que es el punto de intersección entre el eje de rotación de la Tierra y su superficie. El norte magnético, que es el que señala la brújula. A esta diferencia se le llama declinación magnética y su valor depende de dónde estemos situados. Los buenos mapas indican cuál es el valor de la declinación magnética para el centro de la hoja, y cuál es su variación anual. El tercer norte es el que indica el mapa. Como hemos visto en la mayoría de las proyecciones el norte no es un punto sino toda la línea superior del mapa, y eso hay que tenerlo en cuenta a la hora de hacer cálculos precisos. La diferencia en el centro de la hoja, en los mapas con proyección UTM, entre estos tres tipos de norte es muy pequeña.

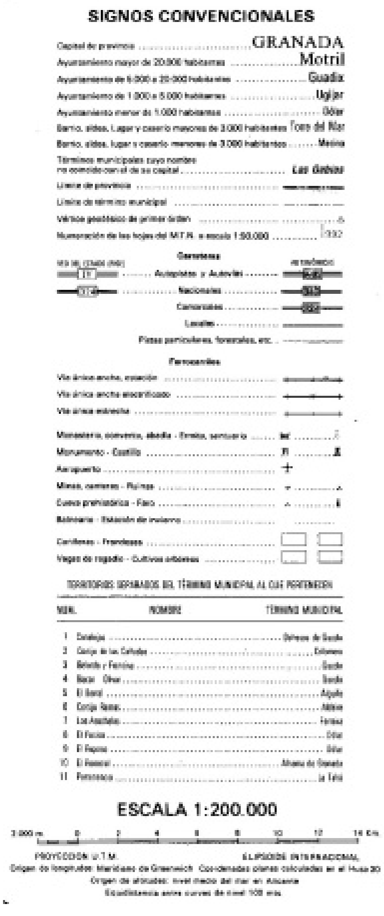
Esta diferencia entre el norte geográfico y el magnético ya la detectó Colón, pero no fue hasta 1831 cuando se encontró el polo norte magnético. Este punto se reconoce porque además de la declinación magnética también esixte la inclinación magmética, que señala el centro de la Tierra. Es cero en el ecuador y de 90º en el polo magnético.

Otra manera de conocer el rumbo en la realidad, sin necesidad de orientar el mapa, es la siguiente. Las brújulas suelen tener un lado recto y un limbo móvil. Colocamos la parte recta entre el lugar donde nos encontramos y el lugar donde queremos ir, con la parte posterior en el lugar donde nos encontramos. Hacemos girar el limbo hasta que quede paralelo a los meridianos y señalando el norte del mapa. Cogemos la brújula en la mano y la giramos hasta que la aguja magnética coincida con el norte que hemos marcado. Entonces el lado recto de la brújula indicará la dirección que debemos seguir.

Ejercicio

10. En el mapa de una parte de la provincia de Granada, que se incluye a continuación, identifica los distintos elementos descritos de los mapas topográficos.





4. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. Construcción de un panel de orientación. Coordenadas polares[3]

Practicar el juego que se describe a continuación. Analizar y discutir las estrategias posibles de solución.

Material:

- Varias copias de un mapa de la región, provincia, o municipio
- Discos recortados en papel no cuadriculado
- Instrumentos de dibujo

Descripción:

Los alumnos se distribuyen en equipos. Unos reciben un mapa y otros un disco de papel. La actividad consiste en realizar, sobre el disco, un "panel o cuadro de orientación" para un lugar dado (marcado sobre el mapa por un punto bien visible). Este punto se elige por los propios alumnos. Puede ser el mismo para todos o no.

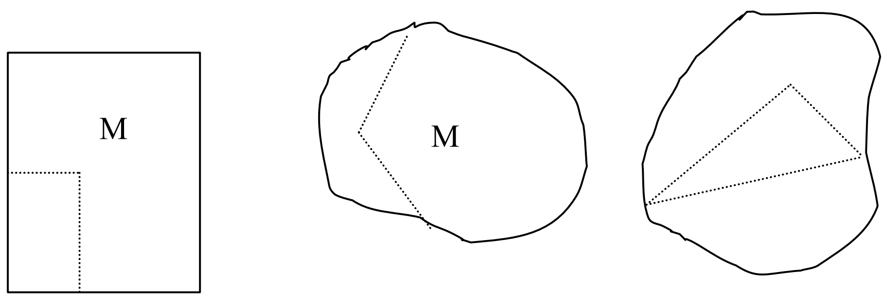
Cada uno de los equipos que dispone de un mapa se asocia con un equipo de los que tienen un disco. Los que tienen el mapa deben proporcionar a los otros los datos que les permitan construir el panel de orientación. Se eligen primero los lugares o localidades que figurarán sobre el panel. Se discute entre los equipos o en toda la clase, ¿Qué datos proporcionar?; ¿Qué instrumentos utilizar? ¿Cómo realizar el panel a partir de estos datos? Una vez construido el panel, ¿cómo se debe colocar sobre el terreno?

2. El barco perdido. Coordenadas cartesianas y bipolares

Practicar el juego que se describe a continuación. Analizar y discutir las estrategias posibles de solución según la variable didáctica "forma de la hoja".

Material:

- Hojas de papel blanco, no rayadas, trasparentes o traslúcidas, rectangulares o con formas irregulares. Sobre cada una de estas hojas se marca un punto en distintos lugares en las diversas hojas.
- Instrumentos de medida.



Descripción:

Se organiza la clase en equipos, en situación de comunicación entre ellos, es decir, la actividad supone un intercambio de mensajes entre unos emisores y receptores.

[3] Aides Pédagogiques pour le Cycle Moyen. (1983, p. 63)

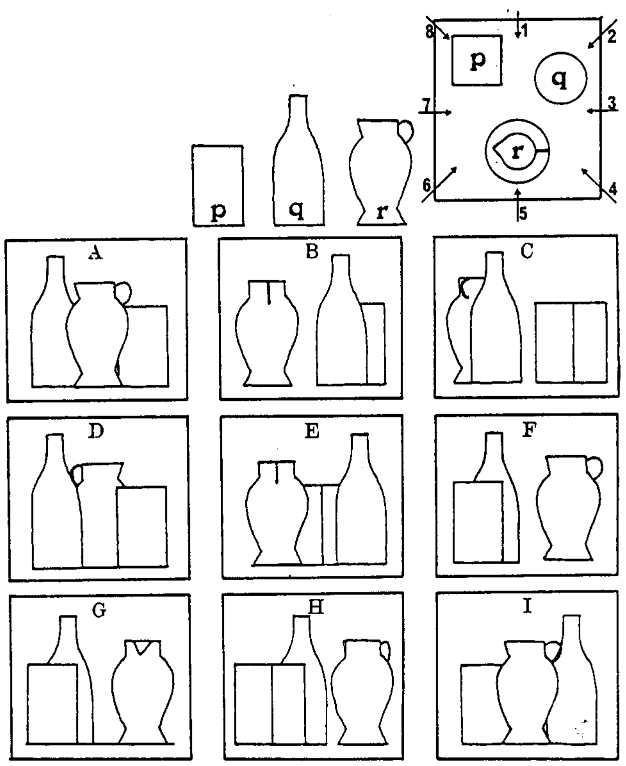
Se imagina que el punto marcado sobre la hoja representa un barco perdido en el mar. El capitán (alumno o equipo) envía mensajes para señalar su posición con el fin de que le localicen y presten ayuda.

El receptor del mensaje puede solicitar al emisor informaciones complementarias, aclaraciones de los mensajes emitidos, precisiones, etc. Para mostrar que el mensaje se comprende y las informaciones son "pertinentes" el receptor debe colorar un punto (de color diferente) sobre su hoja con el fin de marcar la posición del barco que debe identificar. La superposición de las hojas debe permitir el control de los resultados.

3. Puntos de vista

Tres objetos (una caja p, una botella, q y una jarra r) se disponen sobre una mesa como se indica en la figura. Las imágenes que hay debajo representan vistas, según diferentes puntos de vista. Por ejemplo, la imagen I es la vista de la dirección marcada con '5'.

Determinar el punto de vista de cada una de las imágenes. Algunas vistas son FALSAS. ¿Cuáles? ¿Por qué?



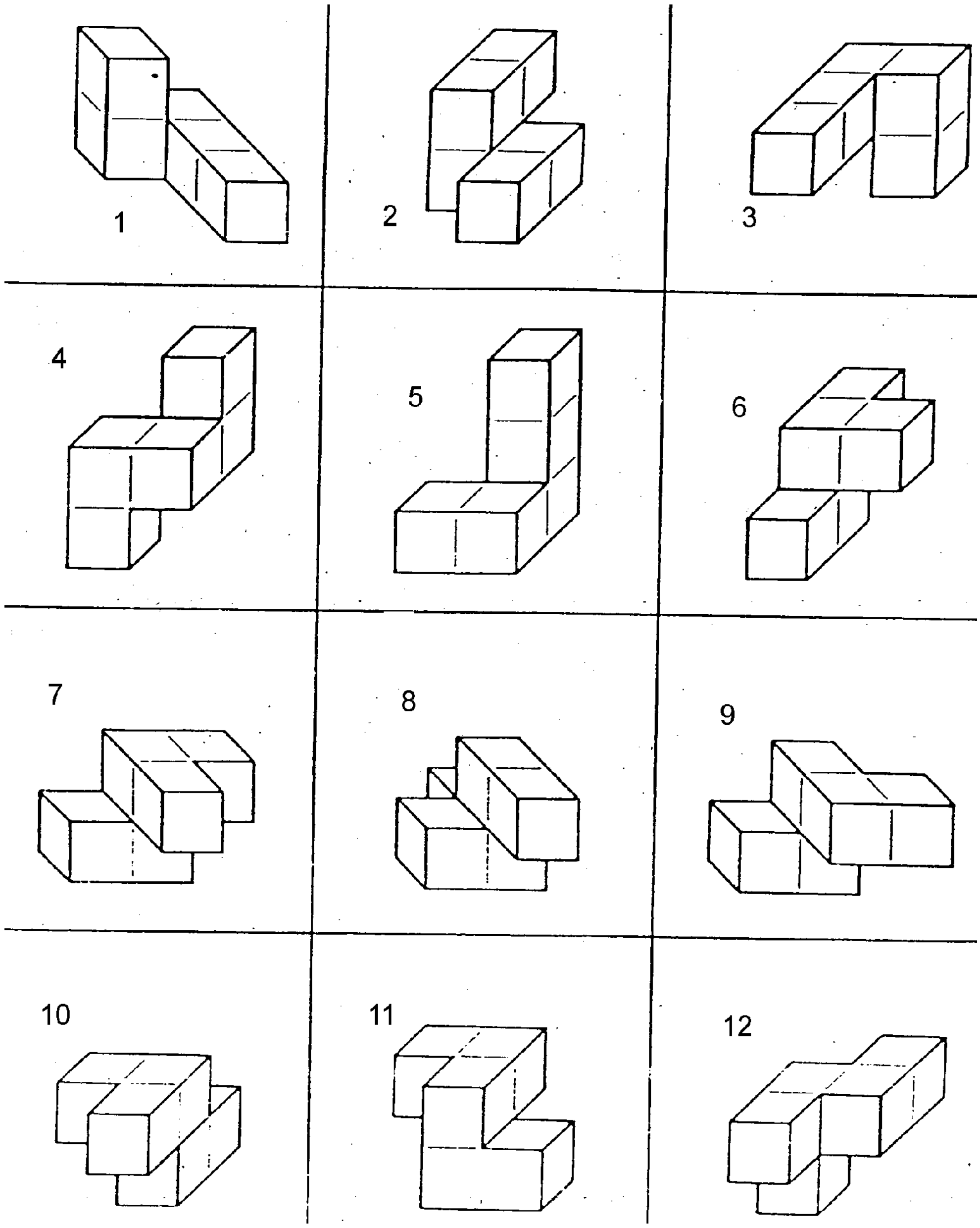
4. Orientación en el espacio

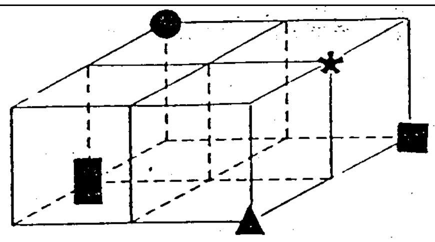
1. Tres sólidos diferentes están representados en diversas posiciones: Determinar qué sólidos son equivalentes.

Respuestas: Sólido A: 1, 3, 5,

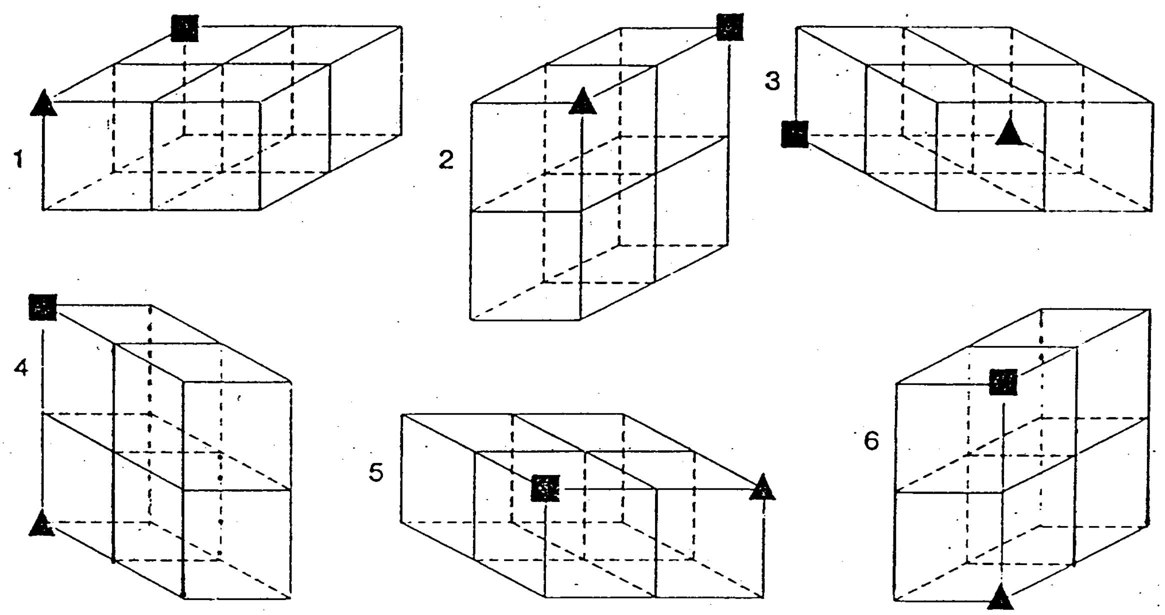
Sólido B : _______________

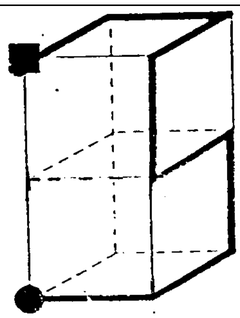
Sólido C: ______________

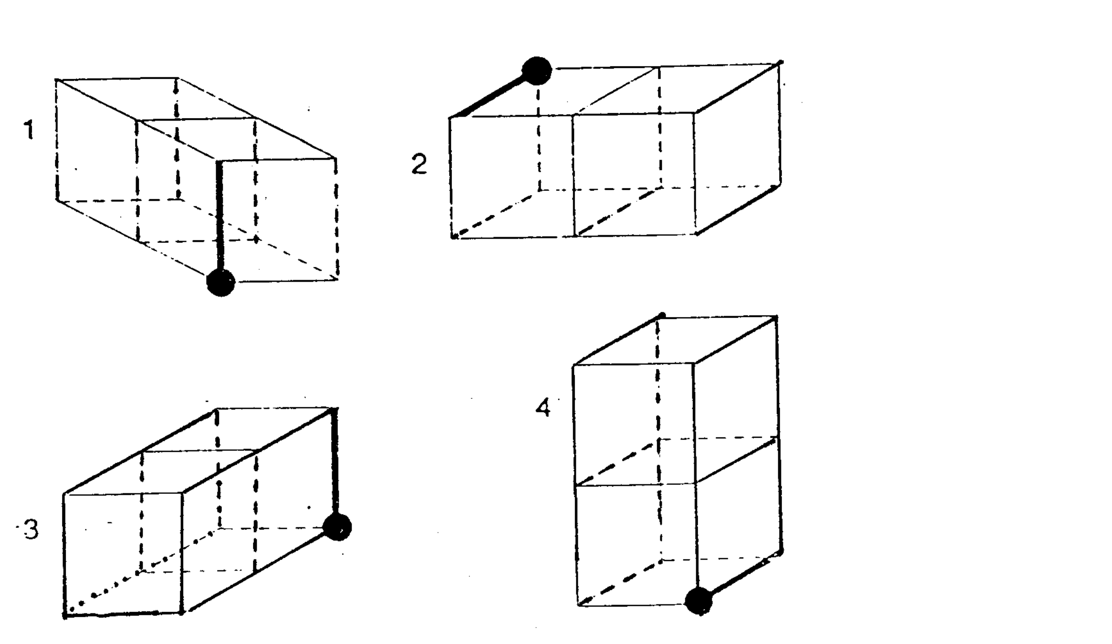


5. Disponemos de una red compuesta de 4 cubos. Cinco vértices están marcados por un cuadrado, un triángulo, una estrella, un círculo y un rectángulo.	

A continuación aparece la misma red en posiciones distintas. Sitúa el círculo, la estrella y el rectángulo en cada uno de ellas.

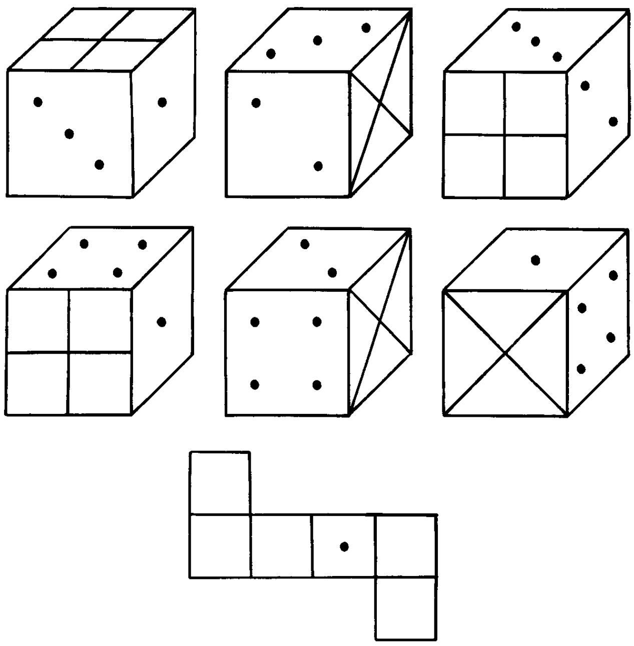


6. Esta red de dos cubos aparece en diferentes posiciones	

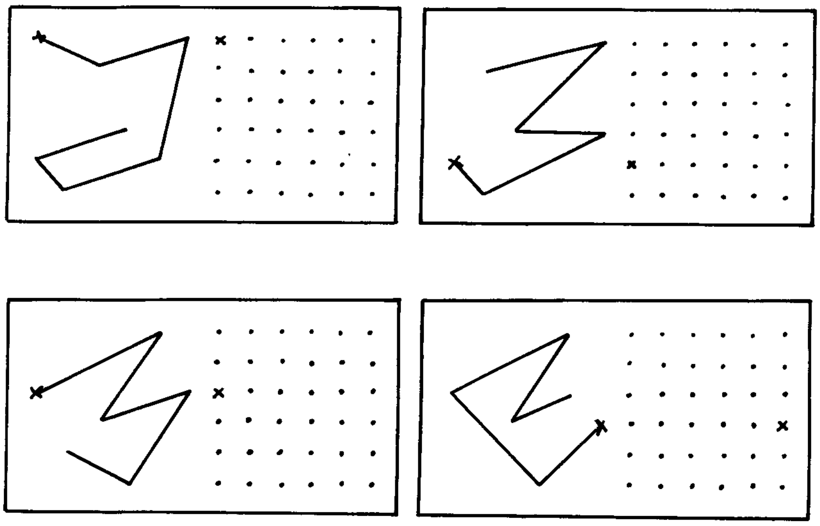


Dibuja el camino que lleva a ■

7 Estudiar las seis posiciones dadas de este cubo y completar su desarrollo:



8. Copiar a la derecha en el espacio punteado la figura dibujada a la izquierda, empezando por la señal establecida:



9. Observar bien el dibujo situado a la izquierda y plegarlo mentalmente hasta llegar a obtener la posición indicada en el dibujo de la derecha. Completar la figura plegada dibujando lo que le falta.

a)

b)

c)

10. Problemas de escalas[4]

1) Busca un artlas o u mapa de carreteras que esté dibujado a una escala comprendida entre 1:5.000.000 y 1:1.000.000.

a) Con la regla y un curvímetro (o un cordel si no tienes), mide las distancias que te piden en el cuadro siguiente. A continuación calcula las dimensiones reales.

	Madrid-Granada	Valencia-Sevilla	Burgos- Ávila

[4] Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.

Plano			
Realidad			

b) ¿Cuál es la población de la costa peninsular que está más cerca de Palma de Mallorca? Expresa la distancia en millas marinas. (Una milla marina = 1.852 metros)

2) Calcula la escala en que ha sido construido un coche miniatura respecto al de verdad si la distancia entre los ejes es de 2 cm y 280 cm, respectivamente.

3) Haz un plano a escala 1:20 de tu habitación y de los elementos más importantes.

4) ¿Cuál es la distancia real entre estas poblaciones?

Barcelona - Madrid (escala 1:1.000.000), distancia en el plano: 18,4 cm

Lérida - Viella (escala 1:500.000), distancia en el plano: 32 cm

Manresa - Vic (escala 1: 200.000), distancia en el plano: 18,4 cm

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

El Diseño Curricular Base del MEC no hace mención a las experiencias y conocimientos sobre localización espacial y los sistemas de referencia. Contrasta esta situación con las orientaciones de la Comunidad Autónoma de Andalucía, las cuales hacen mención también a las experiencias y nociones topológicas elementales. Resumimos a continuación estas orientaciones curriculares.

Conocimiento y representación espacial

Entre los aprendizajes más significativos que deben integrar el conocimiento del medio en el que el alumno está inmerso, sin duda ocupan un lugar de excepción los conocimientos sobre el espacio.

La realidad que nos rodea comprende objetos con forma y dimensiones diferenciadas, entre los que se establecen determinadas relaciones que configuran aspectos importantes de la vida cotidiana.

Al propio tiempo, las propiedades geométricas de los objetos y lugares, las afinidades y diferencias entre ellas, las transformaciones a las que pueden ser sometidas y la sistematización, conceptualización y representación de todo ello, constituyen un campo de conocimientos idóneo, que puede contribuir al desarrollo intelectual de los alumnos de esta etapa.

Al desarrollar los contenidos relacionados con el conocimiento, orientación y representación espacial el alumno progresará, en función de sus vivencias y nivel de competencias cognitivas, desde las percepciones intuitivas del espacio, hasta la progresiva construcción de nociones topológicas, proyectivas y euclidianas, que le facilitarán su adaptación y utilización del espacio.

Percepción, conocimiento y generalización de nociones topológicas básicas y aplicación de las mismas al conocimiento del medio.

Durante toda la etapa se propondrán situaciones en las que intervengan nociones como proximidad, separación, orden, cerramiento, continuidad... Se comenzará por vivenciarlas mediante juegos y actividades donde los alumnos hayan de situarse, aproximarse, desplazarse, etc. Posteriormente lo harán con objetos y elementos reales, estableciendo relaciones espaciales como cerca, lejos, dentro, fuera, sobre, debajo, delante, etc.

Seguidamente se tratará, en situaciones contextualizadas, la relativización de estos conceptos, invitándoles a la secuenciación, clasificación y representación de las relaciones en orden a un referente establecido. Se trabajará la representación oral y gráfica de las acciones realizadas, mediante signos y códigos elaborados por los propios alumnos. Ello facilitará la representación mental de estas nociones.

A lo largo del proceso se potenciará la búsqueda de regularidades y la estimación de propiedades en estas relaciones: transitividad, conservación, reflexividad, etc. proponiendo a los alumnos la reflexión acerca de la importancia de las mismas en la situación y estructuración de los elementos en el espacio.

Coordinación de las diversas perspectivas desde las que se puede contemplar una realidad espacial.

El descubrimiento de la noción de óptica relativa, o capacidad para concebir la situación y posición de los objetos en el espacio, si los imaginamos desde varios puntos de referencia, constituye un importante contenido.

Mediante observaciones dirigidas, acciones sobre objetos reales y manipulación de material apropiado en situaciones de aprendizaje diseñadas al efecto, se acercarán los alumnos a las distintas nociones proyectivas: perspectiva, rectitud, distancia, paralelismo, ángulo, simetría, etc.

Se tratará de que los alumnos y alumnas actúen interesados por la resolución de problemas espaciales y manifestando curiosidad ante sus descubrimientos. El profesor les ayudará en la formulación de hipótesis y conjeturas en relación con las situaciones propuestas.

Desarrollo de los sistemas de referencia. Localización de objetos en el espacio

La orientación, ubicación y movimiento de objetos en el espacio implica la existencia de determinados elementos de referencia en función de los cuales puede localizarse la dirección y posición de estos.

Durante la etapa primaria se desarrollará progresivamente en los alumnos la utilización de la horizontalidad y verticalidad como ejes de referencia. Ello dará lugar a nociones como derecha, izquierda, arriba, abajo, etc. y a la coordinación de las mismas.

Se concederá especial importancia a la representación y lectura de puntos en los sistemas de coordenadas cartesianas, así como a la elaboración e interpretación de croquis de itinerarios. En relación con el conocimiento del mundo físico, se trabajará, graduando la dificultad, la construcción de planos y maquetas, cuyo análisis puede ser fuente de conocimientos geométricos. Posteriormente se abordarán la lectura, interpretación y reproducción a escala, de mapas elementales.

Los Principios y Estándares 2000 del NCTM

En estas orientaciones curriculares se incluye un objetivo general sobre especificación de posiciones, descripción de relaciones espaciales usando sistemas de representación. Su detalle y desglose entre los ciclos Infantil a 2º curso y de 3º a 5º curso es el siguiente:

Infantil a 2º curso	3º a 5º curso
- describir, nombrar e interpretar las	- describir posiciones y movimientos

posiciones relativas en el espacio y aplicar ideas sobre posición relativa; - describir, nombrar e interpretar la dirección y distancia en el movimiento espacial y aplicar ideas sobre dirección y distancia; - encontrar y nombrar posiciones con relaciones simples, como "cerca de" y en sistemas de coordenadas tales como en los mapas.	usando el lenguaje común y el vocabulario geométrico; - construir y usar sistemas de coordenadas para especificar posiciones y describir trayectorias; - encontrar la distancia entre puntos en las direcciones horizontal y vertical del sistema de coordenadas.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

Las primeras nociones de posición relativa que aprenden los niños pequeños son las de encima, debajo, detrás, delante, entre. Más tarde pueden usar rejillas rectangulares para localizar objetos y medir la distancia entre puntos según direcciones horizontales y verticales. Las experiencias con el sistema de coordenadas rectangulares serán útiles a medida que resuelven una variedad de problemas de geometría y álgebra. En los niveles superiores de primaria y en secundaria el sistema de coordenadas puede ser útil para explorar y descubrir propiedades de las figuras. Encontrar distancias entre puntos del plano usando escalas en mapas es importante en estos niveles.

En los primeros niveles de primaria los alumnos pueden trabajar con interpretaciones de las operaciones aditivas sobre la recta numérica. En niveles posteriores la recta numérica se puede usar para representar los distintos tipos de números. En el segundo ciclo de primaria las rejillas rectangulares y las tablas de doble entrada pueden ayudar a los alumnos a comprender la multiplicación.

2.1. El desarrollo de sistemas de referencia

El movimiento en el espacio supone servirse de puntos de referencia merced a los cuales localizar la dirección y la posición. Las investigaciones indican que un factor importante en el desarrollo de la apreciación espacial es la capacidad para utilizar alguna suerte de sistema de referencia. "Piaget e Inhelder consideran que la conceptualización de "marco de referencia" reviste carácter fundamental para que el individuo posea la facultad de habérselas con la orientación, la ubicación y el movimiento de objetos; constituye, por consiguiente, el punto culminante de todo el desarrollo psicológico del espacio euclideo" (Dietz y Barnett, 1978; citado por Dickson y Brown,1991, p. 56).

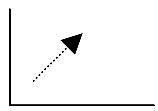
La esencia de un sistema de referencia es la relación de las partes móviles con algún aspecto invariable y estacionario del espacio; por ejemplo, una superficie horizontal, los ejes de una gráfica, la noción de dirección norte. Tales son los puntos de referencia que proporcional el armazón sobre el cual estudiar el movimiento de, pongamos por caso, bloques de construcción, un triángulo o un barco.

Según Piaget e Inhelder, el desarrollo de sistemas de referencia se funda en la capacidad natural de utilizar el que ellos describen como marco de referencia natural, a saber, el correspondiente a la horizontal y la vertical.

Un elemento importante para servirse satisfactoriamente de los sistemas de referencia es la conciencia de la dirección. Greenes sostiene que, de ordinario, las relaciones espaciales se exploran inicialmente a lo largo del eje vertical, o sea, mirando arriba y abajo. Arriba/abajo, alto/bajo, encima/debajo, etc, son nociones todas ellas de muy distinto significado; por ejemplo, lo que se ve al mirar al techo es muy distinto y diferenciable de lo que se ve al mirar al suelo. Se desarrollan después las relaciones de orientación horizontal, las cuales, en cambio no se encuentran tan tajantemente diferenciadas. Aunque al mantener la cabeza en una dirección particular lo que se ve está al frente y lo que no se ve se encuentra a espaldas nuestras, si nos volvemos, lo que antes estaba delante se encuentra ahora detrás de nosotros, y análogamente, lo que estuvo a la izquierda se encuentra ahora a la derecha. La noción de orientación horizontal tarda más en desarrollarse que la orientación vertical, porque la relativa facilidad del movimiento del propio cuerpo sobre un plano horizontal confunde la orientación.

Piaget y colaboradores sostienen que la capacidad para utilizar coordenadas se desarrolla juntamente con la de utilizar ejes de referencia horizontal y vertical. Estos investigadores presentaron a los niños dos hojas congruentes de papel. En una de ellas se había señalado un punto. Se le pedía al niño que marcase un punto en la segunda hoja, semitransparente, de modo que si ésta fuera colocada directamente sobre la primera, la provista del punto, los puntos de una y otra coincidieran exactamente.

Los resultados en esta tarea mostraron que en el nivel más elemental de desarrollo, el niño se apoyaba por completo en una estimación visual que posteriormente conducía a una estimación burda mediante reglas y palitos. Es en una siguiente fase en la que el niño capta la necesidad de medir, pero sigue operando todavía con una única medida, tal como la distancia desde el punto a un vértice cercano.



Más tarde se percata de la necesidad de dos medidas. Tal procedimiento presupone muchísimos tanteos, en los que es frecuente que el niño utilice solamente una medida y efectúe una estimación de la segunda. Por fin, hacia los nueve años de edad (según Piaget) se coordinan ambas mediciones, utilizando los lados de la hora como ejes de referencia.

Ejercicio

1. En una colección de libros de texto de primaria identificar los niveles en los cuales se incluyen actividades de,

- orientación espacial
- localización de puntos en el plano

2.2. La variable tamaño del espacio

Una de las variables que se debe tener en cuenta en el proceso de adquisición del dominio de las relaciones con el espacio es la dimensión física del ámbito con el que el sujeto entra en relación. Las investigaciones psicológicas muestran que el niño va estructurando sectores más amplios del espacio a medida que incrementa la magnitud de sus propios desplazamientos. Brousseau distingue tres valores de la variable "tamaño del espacio" con el que interactúa el sujeto. Estos valores implican modos diferentes de relaciones con los objetos incluidos en ese sector del espacio y, en consecuencia modelos conceptuales diferentes para orientar la acción del sujeto. Esta variable interesa segmentarla en tres valores: microespacio, mesoespacio y macroespacio, cuyas características describimos a continuación[5].

El microespacio

Corresponde a un sector del espacio próximo al sujeto y que contiene objetos accesibles tanto a la visión, como a la manipulación. En este sector el sujeto puede mover el objeto o bien moverse a sí mismo prácticamente en cualquier dirección. El juego de desplazamientos de sujeto y objeto, permite reestablecer cualquier perspectiva, mediante inversiones o compensaciones de las transformaciones anteriores. Puesto que todas las posiciones relativas entre sujeto y objeto son igualmente posibles y fáciles de obtener la percepción del objeto puede ser caracterizada como exhaustiva. Por otra parte, el sujeto obtiene una información abundante e inmediata de los resultados de las acciones que ejerce sobre el objeto. El sujeto controla plenamente sus relaciones espaciales con el objeto, debido a la abundancia de recursos de transformación con que cuenta.

En el microespacio el dominio de las relaciones con el objeto se adquiere a través de un proceso largo y difícil, pero bastante temprano (según los trabajos de Piaget). Este proceso se realiza "espontáneamente", en el sentido de que no requiere de intervención intencional (institucional) para producirse, aunque sí oportunidades para ejercitar las manipulaciones de que el sujeto va siendo capaz. Posteriormente, el trabajo escolar impone cierta reestructuración del microespacio al introducir dos direcciones ortogonales para orientar el papel (y otros materiales) sobre el pupitre.

El mesoespacio

Es una parte del espacio accesible a una visión global, obtenida a partir de percepciones sucesivas, pero con desfases temporales mínimos. Contiene objetos fijos, no manipulables. Como un ejemplo de mesoespacio, podemos citar el espacio que contiene a un edificio, que puede ser recorrido por el sujeto tanto interior como exteriormente.

En este sector del espacio, puesto que los objetos permanecen fijos, funcionan como puntos de referencia para el sujeto (en nuestro ejemplo, los muebles, puertas, pareces), mientras que el sujeto sí puede desplazarse, pero con restricciones, derivadas de dos condiciones:

1. La posición erecta del sujeto, que genera una experiencia diferencial respecto a las direcciones horizontal y vertical. Estas constituyen las direcciones básicas para la organización del mesoespacio.
2. La necesidad de acomodar los desplazamientos en función de la localización de los objetos. Resultan de aquí trayectso obligados, como los determinados por corredores o escaleras, que implican la diferenciación de espacios vacíos y llenos.

Podemos decir que el mesoespacio es el espacio de los desplazamientos del sujeto. La experiencia está aquí restringida a los puntos de vista obtenibles a través de los desplazamientos posibles del sujeto, manteniendo su postura erecta. Esto no significa

[5] Gálvez, G. (1985) *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano.Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela*. Tesis Doctoral. Centro de Investigación del IPN. México. (p. 49).

que sea imposible para el sujeto adoptar otras perspectivas, sino que, en la medida en que éstas no son usuales, no contribuyen significativamente a la estructura del mesoespacio.

Para organizar sus desplazamientos dentro del mesoespacio el sujeto necesita orientarlo, atribuyéndole tres dimensiones respecto a un sistema de referencia fijo. También le ha atribuido extensión, con lo que las distancias entre objetos pasan a tomar una relevancia de la que carecen el microespacio. Los ángulos son muy importantes, puesto que están a la base de cambios de perspectiva muy económicos, que corresponden a giros del sujeto mientras conserva su posición (giros que incluso puede efectuar moviendo solamente su cabeza)

El macroespacio

Corresponde a un sector del espacio cuya dimensión es tal que sólo puede abarcarse a través de una sucesión de visiones locales, separadas entre sí por desplazamientos del sujeto sobre la superficie terrestre. En el macroespacio es imposible obtener una visión global simultánea del sector del espacio con el que se interactúa, a menos que el sujeto se eleve en el aire, experiencia a la que raras veces se recurre para estructurar el espacio terreste a nivel de experiencia cotidiana.

Al igual que en el mesoespacio, en el macroespacio los objetos permanecen fijos, es el sujeto el que se desplaza. Para orientar sus desplazamientos debe construir una representación global del macroespacio, ligando sus visiones parciales para recuperar la continuidad del espacio recorrido. La conceptualización es imprescindible para la construcción de una imagen de conjunto, inaccesible a la percepción directa.

Podemos distinguir tres tipos de macroespacio: el urbano, el rural y el marítimo. En el macroespacio urbano y rural, existen múltiples objetos que pueden ser utilizados por el sujeto como puntos de referencia para estructurar su representación. La posibilidad de utilizarlos dependerá tanto de las características específicas del sector considerado como de la experiencia previa del sujeto. Aunque, en general, el macroespacio urbano suele ser más pródigo en objetos que pueden funcionar como signos para la diferenciación precisa de sus partes (por ejemplo, la información escrita contenida en nombres de calles y comercios, en letreros de propaganda, etc.). A diferencia de lo que ocurre en los otros dos, en el macroespacio marítimo, particularmente en la navegación en alta mar, no es posible recurrir a una sucesión de encuentros con determinados objetos para replicar un trayecto.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

3.1. Situación 1[6]: Búsqueda de un objeto escondido en clase

Nivel: Ciclo inicial; trabajo en el mesoespacio.

Descripción:

Mientras un alumno sale del salón otro esconde un objeto en una banca y marca dicha banca sobre un plano del aula que el maestro ha hecho en la pizarra (Variante 1) o reproducido en una hoja de papel (Variante 2). Entra el alumno que estaba fuera y viendo el plano, tiene que dirigirse a la banca donde, de acuerdo a su interpretación del plano, se encuentra el objeto escondido. Los demás le comunican si acertó o no. En la Variante 2 cada alumno tiene una copia del plano del salón y debe ir registrando sobre

[6] Galvez (1985, p. 65)

cada banca usada como escondite, el nombre del niño al que le correspondió buscar en esa ocasión.

3.2. Situación 2[7]: Búsqueda de un objeto escondido dentro del espacio escolar.

Niveles: 1er Ciclo de primaria

Descripción:

Dos alumnos esconden un objeto (una moneda) en algún lugar de la escuela, elegido por ellos. Un tercer alumno los observa y traza un dibujo que servirá para guiar a un cuarto alumno en la búsqueda del objeto escondido. Si este último encuentra la moneda, puede quedársela. Si la búsqueda se convierte en una exploración al azar el experimentador da por terminada la jugada; declarando que la comunicación ha fracasado. La actividad se repite, intercambiando las funciones, y luego con otros cuatro alumnos.

3.3. Situación 3[8]: Localización de objetos en el microespacio

Nivel: 2º Ciclo

Descripción:

En el fondo de una caja de cartón (de aproximadamente 60 cm x 50cm x 5cm) se pone un trozo de papel (de unos 15 cm^2), a la vista de los niños. Se tapa la caja con una tela y se les pide que estimen la localización del papel clavando un alfiler sobre la tela para atraparlo. Se levanta la tela para ver si acertaron.

<u>Variante 1</u>: Juego individual. Si el niño acierta se dobla el papel a la mitad, hasta que yerra. Gana quien logre atinarle al papel más pequeño.

<u>Variante 2</u>: Un niño esconde un papel (del tamaño al que llegaron, en promedio, en la Variante 1) y le explica a otro niño, verbalmente (sin señalar) su localización bajo la tela. El segundo niño clava el alfiler y luego verifican si atinó.

<u>Variante 3</u>: Un niño esconde un papel (pequeño) y le explica a otro niño, mediante un dibujo, su localización bajo la tela. El segundo niño trata de llegar hasta el papel a través de la tela, clavando su alfiler.

3.4. Situación 4[9]: Localización relativa de lugares conocidos en la ciudad

Nivel: 2º o 3º Ciclo de primaria

Descripción

La actividad se inicia pidiendo a los alumnos que nombren lugares interesantes de la ciudad, donde llevarían a un amigo que no la conociera. Se seleccionan algunos de los lugares propuestos. Se reparte a cada alumno una hoja en blanco y un conjunto de papelitos con los nombres de los lugares seleccionados para que los distribuyan sobre el papel, basándose en su conocimiento de las posiciones relativas de estos lugares en la ciudad (imagínate cómo se vería desde un avión). Una vez distribuidos, los pegan sobre

[7] Galvez (1985, p. 74)
[8] Galvez (1985, p. 81)
[9] Galvez (1985, p. 85)

la hoja y marcan el orden en el que organizarían un recorrido para visitarlos todos.

3.5. Situación 5: Construcción de una brújula y de un plano de la escuela

Nivel: 2º o 3º Ciclo de primaria

Descripción:

Consigue una aguja, un imán pequeño, un recipiente con agua, pegamento y un pedazo de corcho o de madera.

- Frota la aguja en el imán varias veces.
- Pega la aguja en el corcho.
- Coloca el corcho en el recipiente con agua.
- Gira el recipiente y observa que la aguja se mueve y apunta siempre al mismo lugar. Ese lugar es el norte.

1) Usa la brújula para encontrar la orientación de la escuela.

¿Qué parte de tu clase da hacia el norte?
¿Hacia dónde queda la salida de la escuela?
¿Qué hay hacia el sur?

2) Trabajando en equipo dibujar un plano de la escuela y los lugares que están cerca de ella. Fíjense en los puntos cardinales usando la brújula que hicieron. No olviden ponerle el cuadro de acotaciones y la Rosa de los Vientos.

Ejercicio de análisis didáctico:

Para cada una de las situaciones descritas:

a) Formula los objetivos que se pretenden con las situaciones
b) Enumerar y describir los conocimientos que se ponen en juego
c) Identificar las variables didácticas
d) Enunciar variantes posibles de las situaciones cambiando los valores de las variables didácticas
e) Identificar posibles técnicas de solución de los alumnos y dificultades previsibles
f) Indicar las posibles explicaciones (institucionalización) que el profesor podría dar como síntesis final de la actividad realizada.

4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Análisis de experiencias de enseñanza

Las siguientes situaciones, conocidas como "El cartero" y "Viajes y geógrafos", han sido experimentadas por el equipo de investigación del profesor G. Brousseau en la escuela Jule Michelet. Para cada una de las situaciones:

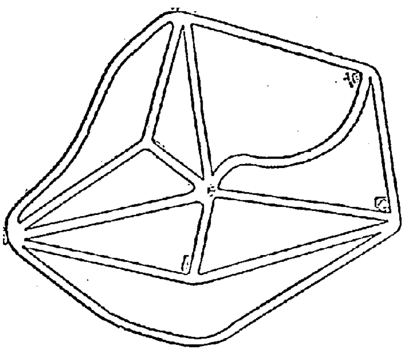
a) Formula los objetivos que se pretenden con las situaciones
b) Enumerar y describir los conocimientos que se ponen en juego
c) Identificar las variables didácticas
d) Enunciar variantes posibles de las situaciones cambiando los valores de las variables didácticas
e) Identificar posibles técnicas de solución de los alumnos y dificultades previsibles
f) Indicar las posibles explicaciones (institucionalización) que el profesor podría dar como síntesis final de la actividad realizada.

El Cartero

Niveles: 2º o 3º Ciclo

Material:

Se prepara sobre una cartulina una representación en planta de un espacio urbano: calles y lugares como edificios o parques, localizados en los cruces de dos o más calles. La cartulina se cubre con una tela que tiene una perforación de aproximadamente 2.5 cm de diámetro y que, al recorrerse, permite observar todo el espacio dibujado, a través de visiones locales. Cada grupo de 4 niños trabaja con uno de estos dispositivos.



Descripción:

Mientras algunos equipos de 4 niños practican juegos destinados a consolidad sus nociones de aritmética a otros se les entrega un diagrama (como el de la figura adjunta) cubierto con una tela perforada y un juego de tres tarjetas. No se imparten instrucciones orales.

La tarjeta 1 propone una actividad de exploración del diagrama: recorrerlo (a través del agujero) hasta que ya no encuentren lugares nuevos.

La tarjeta 2 indica que uno de los jugadores será el Jefe de Correos y ordenará a los demás, por turnos, llevar cartas a diversos lugares; se discutirá la adecuación del recorrido seguido.

La tarjeta 3 sugiere pedir trayectos más complejos y da dos ejemplos: ir de A a B, sin pasar por C o dejar cartas en A, B, y C.

Variante 1: Juego de los mensajes

Se entrega a cada equipo un diagrama, una tela perforada, una tarjeta de instrucciones general y 12 tarjetas de instrucciones específicas, del tipo: "Estás en la fuente; tienes que ir al Banco y después al Supermercado", etc. La tarjeta con instrucciones generales es la siguiente:

> *Ustedes con un equipo de mensajeros que van a trabajar en una ciudad. Bajo la tela está el dibujo de esta ciudad que sólo puede verse por el agujero. Pueden deslizar la tela, de manera que el agujero nos deje ver adónde llegan las calles. En las tarjetas está escrito lo que tienen que hacer los mensajes. Los mensajeros pueden trabajar solos o por parejas, como quieran.*
>
> *El juego consiste en realizar la mayor cantidad posible de las tareas que están escritas en las tarjetas.*
>
> *Antes de empezar a jugar el equipo puede explorar la ciudad, a través del agujero, hasta que cada niño piense que ya la conoce bien y que puede hacer el trabajo de mensajero.*

Variante 2: Viajeros y geógrafos

Se presenta uno de los mismos diagramas utilizados en las dos situaciones anteriores, cubierto con la tela perforada. Se propone explorar el diagrama, desplazando la tela y luego, hacer un plano del diagrama oculto, que será utilizado por los "geógrafos" para anticipar el destino de los "viajeros". Una vez hecho el plano, el equipo se divide en dos parejas: una de geógrafos y la otra de viajeros. Los geógrafos se instalan con el plano en un rincón distante y pueden hacer preguntas, que serán respondidas por los viajeros, para determinar si su plano corresponde o no al diagrama. A continuación se inicia el juego. De común acuerdo, ambas parejas eligen un lugar de partida y lo localizan en el diagrama y en el plano, respectivamente. Los viajeros enuncian una dirección y de avance y los geógrafos, viendo su plano, anticipan a qué lugar van a llegar los viajeros. Entonces los viajeros avanzan y verifican dónde llegan. Se registra si la predicción de los geógrafos fue acertada o no. Después de un rato, geógrafos y viajeros intercambian roles. Finalmente, se organiza un debate para determinar su sistema común de designación de direcciones y para discutir si el mapa era o no una representación correcta del diagrama.

4.2. Análisis de textos y diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizaste personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Busca ejemplos y ejercicios relacionados con la orientación espacial y sistemas de referencia.
2. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
3. Describe los cambios que introducirías en el diseño de las lecciones propuestas para los distintos cursos de primaria.

BIBLIOGRAFÍA

Aides Pédagogiques pour le Cycle Moyen. (1983), Elem-Math VII. Publication de l'A.P.M.E.P., nº 49.

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.